Ueber

Fuchs'sche Differentialgleichungen vierten Grades.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

von der

Philosophischen Fakultät

der

Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

genehmigt

und

nebst den beigefügten Thesen öffentlich zu verteidigen

am 6. März 1897, mittags 12 Uhr

von

August Krause

aus Segeletz Kr. Ruppin.

Opponenten:

Herr **Hans Matthée,** stud. math.
Herr **Johannes Schmidt,** stud. math.
Herr **Richard Fuchs,** cand. math.

Göttingen 1897.

Druck der Dieterich'schen Universitäts-Buchdruckerei.

(W. Fr. Kaestner.)

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535723_0218

Herrn Professor Dr. L. Fuchs

aus Hochachtung und Dankbarkeit

gewidmet.

Die Differentialgleichungen erster Ordnung sind in neuerer Zeit wiederholt Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen. Wie in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, so hat Herr Fuchs auch für diese Gleichungen die Grundlage geschaffen, und zwar hier durch die in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften 1884 *) veröffentlichte Abhandlung: „Ueber Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen".

Er hat darin für diese Differentialgleichungen die folgenden drei notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt:

„1. Die Differentialgleichung hat die Form:

$$(F)\, y'^m + \psi_1 y'^{m-1} + \psi_2 y'^{m-2} + \cdots \psi_m = 0,$$

worin $\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_m$ ganze rationale Funktionen von y mit von z abhängigen Coefficienten von der Beschaffsnheit sind, dass ψ_k höchstens vom Grade $2k$ in Bezug auf y ist.

2. Ist $y = \eta$ eine Wurzel der Diskriminantengleichung $D(z, y) = 0$, für welche die durch (F) definierte algebraische Funktion y' von y sich verzweigt, so ist η ein Integral der Differentialgleichung (F). In der y' als algebraische Funktion von y darstellenden Riemannschen Fläche hat y' in sämtlichen über $y = \eta$ liegenden Verzweigungsstellen den Wert $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$.

3. Je α Blättern, welche sich in $y = \eta$, $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$ verzweigen, entsprechen mindestens $\alpha - 1$ mit $y = \eta$ zusammenfallende Wurzeln der Gleichung $F(z, y, \zeta) = 0$ mit der Unbekannten y."

Herr Poincaré **) hat diesen drei Bedingungen eine andere Form gegeben und hat ausserdem bewiesen, dass die Differential-

*) Die betreffende Sitzung fand am 26. Juni 1884 statt.

**) Acta mathematica Bd. 7. H. Poincaré, sur un théorème de M. Fuchs.

gleichungen erster Ordnung mit festen Verzweigungspunkten, für welche das Geschlecht p der algebraischen Funktion y' von y grösser als Eins ist, algebraisch lösbar sind.

Ferner hat Herr Wallenberg in seiner Inaugural-Dissertation: „Beitrag zum Studium der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, insbesondere derjenigen, welche die Ableitung bis zum dritten Grade enthalten“ *) sich eingehend mit diesem Gegenstande beschäftigt. Schliesslich ist die Abhandlung des Herrn Painlevé zu erwähnen **), die den allgemeineren Fall betrifft, dass die Integrale der Gleichungen auch bewegliche Verzweigungspunkte besitzen, um die sie aber nur eine bestimmte Anzahl von Werten annehmen.

In vorliegender Arbeit habe ich nun, besonders durch die Abhandlung des Herrn Fuchs angeregt, speziell die Differentialgleichungen erster Ordnung und vom vierten Grade in y' mit festen Verzweigungspunkten, die ich nach dem Vorgange des Herrn Wallenberg „Fuchs'sche“ nenne, behandelt.

Im ersten Teil wird die Gleichung von der Form $y'^4 + \psi_1 y'^3 + \psi_2 = 0$ untersucht. Es werden zuerst die Coefficienten den Fuchs'schen Bedingungen gemäss bestimmt und die Lösung algebraisch ausgeführt. Im Anschluss daran findet in gleicher Weise eine Betrachtung der Gleichungen von der Form $y'^m + \psi_1 y'^{m-1} + \psi_2 = 0$ statt.

Der zweite Abschnitt erörtert die Gleichungen, denen nur die erste Potenz der Ableitung fehlt, und die Teile III und IV handeln von den Gleichungen $y'^4 + \psi_1 y'^2 + \psi_2 y' + \psi_3 = 0$ und $y'^4 + \psi_1 y'^3 + \psi_2 y' + \psi_3 = 0$.

Auch die Differentialgleichungen von der Form

$$y'^m + \psi_1 y'^{m-1} + \psi_2 y'^{m-2} + \psi_3 = 0,$$

$$y'^m + \psi_1 y'^{m-2} + \psi_2 y' + \psi_3 = 0$$

und

$$y'^m + \psi_1 y'^2 + \psi_2 y' + \psi_3 = 0$$

lassen sich in derselben Weise, wie die entsprechenden vierten Grades behandeln. Ich gedenke, darauf bei späterer Gelegenheit zurückzukommen.

---

*) Die vollständige Arbeit ist in der Zeitschrift für Mathematik und Physik 1890 veröffentlicht.

**) Painlevé, Mémoire sur les équations differentielles du premier ordre. Annales scientifiques de l'École normale supérieure. Paris 1891.

I.

Wir beschäftigen uns zuerst mit der Gleichung (1) $F = y'^4 + 4\varphi_1 y'^3 + 27\varphi_2 = 0$ und untersuchen, wie die Coefficienten beschaffen sein müssen, wenn die Gleichung den Fuchs'schen Bedingungen genügen soll.

Nach der Bedingung 1 sind dann φ_1 und φ_2 ganze rationale Funktionen von y mit von z abhängigen Coefficienten, und φ_1 ist höchstens vom zweiten und φ_2 höchstens vom achten Grade in y.

Zur weiteren Untersuchung ist die Diskriminante aufzustellen*). Diese lautet $D = \varphi_2^2(\varphi_1^4 - \varphi_2)$. Hieraus ergiebt sich, was ja auch aus (1) unmittelbar hervorgeht, dass für $\varphi_2 = 0$ eine Verzweigung der Funktion y' von y in drei Blättern stattfindet.

1. Wenn wir nun zunächst die Forderung stellen, dass D nur einfache Faktoren in y enthält**), so muss φ_2 von y unabhängig sein. Dann kommen also für y' nur einfache Verzweigungen vor, und die entsprechenden Werte von y liefert der Diskriminantenfaktor $\Delta = \varphi_1^4 - \varphi_2 = 0$. Aus $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ ergiebt sich $y' = -3\varphi_1$, und aus Δ folgt durch Differentiation $y' = -\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial z}}{\frac{\partial \Delta}{\partial y}}$. Diese beiden Werte für y' müssen nach der zweiten Fuchs'schen Bedingung für alle Wurzeln y von Δ identisch sein.

Es ist also $3\varphi_1 - \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial z}}{\frac{\partial \Delta}{\partial y}} \equiv 0 \bmod \Delta$, oder es ist

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial z} - 3\varphi_1 \frac{\partial \Delta}{\partial y} = (A_0 + A_1 y)\Delta,$$

wo A_0 und A_1 nur von z abhängig sind. Daraus folgt:

$$4\varphi_1^3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \varphi_2' - 12\varphi_1^4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = (A_0 + A_1 y)(\varphi_1^4 - \varphi_2)$$

*) Vergl. Wallenberg a. a. O. Seite 246 figd.

**) Diese Forderung ist berechtigt, weil nur einfache Faktoren der Diskriminantengleichung einfache Verzweigungen der Funktion y' von y und somit singuläre Integrale ergeben. Eine Doppelwurzel von D liefert entweder eine wirkliche Verzweigung der Funktion y' in drei Blättern oder führt zu einem sich aufhebenden Verzweigungspunkt.

und nach geringer Umformung

$$\text{(B)}\quad 4\varphi_1^3\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-12\varphi_1^4\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-A_0\varphi_1^4-A_1y\varphi_1^4=\varphi_2'-A_0\varphi_2-A_1y\varphi_2.$$

Die rechte Seite der Gleichung muss durch φ_1 teilbar sein. Da nun φ_1 nicht als Faktor darin enthalten ist, so muss identisch $\varphi_2'-A_0\varphi_2-A_1y\varphi_2=0$ sein. Demnach ist $A_1=0$ und $A_0=\frac{\varphi_2'}{\varphi_2}$; da $A_1=0$ ist, so darf φ_1 nur vom ersten Grade in y sein, was sich aus (A) ergiebt. Nun nimmt (B) folgende Form an:

$$\varphi_1^3\left(4\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-12\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\varphi_2'}{\varphi_2}\cdot\varphi_1\right)=0.$$

Es sei $\varphi_1=a_0+a_1y$, wo a_0 und a_1 rationale Funktionen von z sind; dann erhalten wir für a_0, a_1 und φ_2 und ihre Ableitungen nach z folgende Bedingungsgleichungen:

$$\text{(C)}\quad 4a_0'-12a_0a_1-a_0\frac{\varphi_2'}{\varphi_2}=0,\qquad \text{(D)}\quad 4a_1'-12a_1^2-a_1\frac{\varphi_2'}{\varphi_2}=0.$$

Durch Elimination von $\frac{\varphi_2'}{\varphi_2}$ folgt aus diesen beiden Gleichungen: $\frac{a_0'}{a_0}=\frac{a_1'}{a_1}$ und aus dieser Differentialgleichung $a_1=\frac{a_0}{c}$, wo c die Integrationskonstante ist. Dann wird

$$\text{(C}_1\text{)}\quad \frac{\varphi_2'}{\varphi_2}=\frac{4a_0'}{a_0}-\frac{12a_0}{c}.$$

Da φ_2 und a_0 rationale Funktionen von z sein sollen, so muss $-\frac{12a_0}{c}$ die logarithmische Ableitung einer rationalen Funktion von z sein*). Es sei μ die betreffende Funktion, also $\frac{\mu'}{\mu}=-\frac{12a_0}{c}$. Soll aber μ rational sein, so muss $\frac{12}{c}$ eine ganze Zahl werden. Man erhält nun $\varphi_2=ka_0^4\mu$ (k ist die Integrationskonstante). Substituieren wir für a_0 den Wert von μ, so ist $\varphi_2=\frac{kc^4\mu'^4}{12^4\mu^3}$**). Die Differentialgleichung (1) erhält nun folgende Gestalt:

---

*) Vergl. Wallenberg a. a. O. Seite 211.

**) Man kann auch zuerst φ_2 aus (D) bestimmen:

Da φ_2 und a_1 rational sein sollen, so setzen wir $a_1=-\frac{\mu'}{12\mu}$ und erhalten $\varphi_2=\frac{k\mu'^4}{12^4\mu^3}$; dann folgt aus (C) $a_0=\pm\frac{k_1\sqrt[4]{k}\,\mu'}{12\mu}$ oder, $k_1\sqrt[4]{k}=c$ substituiert:

$$a_0=\pm\frac{c\mu'}{12\mu}.$$

$$(1) \qquad y'^4 - \frac{\mu'}{3\mu}(y+c)\,y'^3 + \frac{3^3 k c^4 \mu'^4}{12^4 \mu^3} = 0.$$

Hierin ist k eine willkürliche Konstante; sie darf nur nicht $= 0$ werden, da sonst die Gleichung reduktibel wird. Setzen wir

$$y + c = w \quad \text{und} \quad \mu = \frac{3 \cdot 4^4 \cdot \lambda}{k c^4},$$

so geht (1) in

$$w'^4 - \frac{\lambda'}{3\lambda} w w'^3 + \frac{\lambda'^4}{\lambda^3} = 0$$

über.

Diese Gleichung ist vom Geschlechte $p = 0$. Um sie zu lösen, benutze ich die Substitution $w' = -\frac{1}{3}\frac{\lambda'}{\lambda} t$. Dann wird $w = -t - \frac{3^4 \lambda}{t^3}$. Es lassen sich also, wie es bei einer Unikursalkurve sein muss, die Coordinaten rational durch einen Parameter ausdrücken. Durch Differentiation von w nach z ergiebt sich

$$w' = -t' - 3^4 \frac{(t\lambda' - 3\lambda t')}{t^4}.$$

Durch Gleichsetzung dieses Wertes mit dem obigen von w' erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{3^4}{t^4}(t\lambda' - 3\lambda t') = \frac{1}{3\lambda}(t\lambda' - 3\lambda t') \quad \text{oder} \quad t' = \frac{\lambda'}{3\lambda} t.$$

Daraus folgt $t = c\sqrt[3]{\lambda}$; infolge dessen wird $w = -c\sqrt[3]{\lambda} - \frac{3^4}{c^3}$. Die Verzweigungspunkte dieser Funktion sind von den Anfangswerten unabhängig, was aus der Form des Integrals unmittelbar hervorgeht; sie sind durch die Null- und Unendlichkeitsstellen von λ bestimmt. Als Beispiel diene

$$w'^4 - \frac{a_1 + 2a_2 z}{3(a + a_1 z + a_2 z^2)} \cdot w w'^3 + \frac{(a_1 + 2a_2 z)^4}{(a + a_1 z + a_2 z^2)^3} = 0,$$

wo $\lambda = a + a_1 z + a_2 z^2$ ist; dann ist

$$w = -c\sqrt[3]{a + a_1 z + a_2 z^2} - \frac{3^4}{c^3}.$$

Das im Vorstehenden Ausgeführte lässt sich ohne weiteres auf die Differentialgleichung m^{ten} Grades $y'^m - m\varphi y'^{m-1} + (m-1)^{m-1}\psi = 0$ anwenden, wo φ vorläufig eine Funktion zweiten Grades von y mit von z abhängigen Coefficienten ist und ψ y nicht enthält. Durch

dieselben Schlüsse ergiebt sich, dass φ nur vom ersten Grade in y sein darf.

Wir erhalten dann wieder für a_0, a_1, ψ und ihre ersten Ableitungen nach z die beiden Bedingungsgleichungen

$$(A) \quad ma_0' + m(m-1)a_0a_1 - a_0\frac{\psi'}{\psi} = 0,$$

$$(B) \quad ma_1' + m(m-1)a_1^2 - a_1\frac{\psi'}{\psi} = 0$$

und schliesslich die Differentialgleichung

$$w'^m - \frac{1}{m-1}\cdot\frac{\lambda'}{\lambda}\cdot ww'^{m-1} + \frac{\lambda'^m}{\lambda^{m-1}} = 0.$$

Um diese Gleichung zu lösen, setzen wir, dem Früheren gemäss,

$$w' = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{\lambda'}{\lambda}\cdot t.$$

Dann wird

$$w = -t - \frac{(-1)^m(m-1)^m\lambda}{t^{m-1}},$$

und es ergiebt sich in derselben Weise wie oben die Differentialgleichung

$$t' = \frac{1}{m-1}\cdot\frac{\lambda'}{\lambda}\cdot t.$$

Daraus folgt

$$t = c\sqrt[m-1]{\lambda} \quad \text{und} \quad w = -c\sqrt[m-1]{\lambda} - \frac{(-1)^m(m-1)^m}{c^{m-1}}.$$

Ist z. B. die Gleichung

$$w'^{11} - \frac{7ww'^{10}}{10(a+z)} + \frac{7^{11}}{(a+z)^4} = 0$$

gegeben, wo $\lambda = (a+z)^7$ ist, so erhält man

$$w = -c\sqrt[10]{(a+z)^7} + \frac{10^{11}}{c^{10}}.$$

Dies Integral hat feste Verzweigungspunkte.

2. Wir wenden uns nun zu dem Fall, dass in der Gleichung (1) $F = y'^4 + 4\varphi_1 y'^3 + 27\varphi_2 = 0$ φ_2 von y abhängig ist. Dann müssen nach der dritten Fuchs'schen Bedingung in φ_2 die y enthaltenden Faktoren quadratisch vorkommen. Da ferner für $\varphi_2 = 0$ $y' = 0$ wird, so müssen die y enthaltenden Faktoren von z unabhängig sein. Wir setzen deshalb $\varphi_2 = \psi\cdot q^2$, wo ψ eine Funktion von z und q eine Funktion von y ist. Zur näheren Untersuchung

dieses Falles wenden wir die Relation von Poincaré*) an. Diese lautet:

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} = PF + Q \cdot \frac{\partial F}{\partial y'},$$

wo P und Q ganze Polynome in y und y' mit von z abhängigen Coefficienten sind.

Es ist nun $Q = R + Sy'$, wo R und S ganze Funktionen von y mit von z abhängigen Coefficienten sind. Dann wird

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' = 4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} y'^4 + 54\psi q \frac{\partial q}{\partial y} y' \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} y'^3 + 27 q^2 \psi',$$

folglich

$$4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} y'^4 + 4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} y'^3 + 54\psi q \frac{\partial q}{\partial y} y' + 27 q^2 \psi' =$$
$$P(y'^4 + 4\varphi_1 y'^3 + 27\psi q^2) + (R + Sy')(4y'^3 + 12\varphi_1 y'^2).$$

Durch Vergleichung der Coefficienten gleich höher Potenzen von y' erhalten wir nun folgende Gleichungen:

1) $4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - P - 4S = 0,$ 2) $4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - 4\varphi_1 P - 4R - 12\varphi_1 S = 0,$

3) $12\varphi_1 R = 0,$ 4) $54\psi q \frac{\partial q}{\partial y} = 0,$ 5) $27 q^2 \psi' - 27 P \psi q^2 = 0.$

Aus 3) folgt $R = 0$ und aus 4) $\frac{\partial q}{\partial y} = 0$, also ist q eine Konstante. Aus 5) ergiebt sich $P = \frac{\psi'}{\psi}$, und es bleiben nun die beiden Gleichungen:

1) $4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\psi'}{\psi} - 4S = 0$ und

2) $4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - 4\varphi_1 \frac{\psi'}{\psi} - 12\varphi_1 S = 0.$

Nehmen wir an, dass φ_1 den nach der ersten Fuchs'schen Bedingung höchsten Grad in y wirklich besitzt, so ist

$$\varphi_1 = a_0 + a_1 y + a_2 y^2,$$

wo die a Funktionen von z sind.

Eliminieren wir nun aus 1) und 2) S und setzen für φ_1 seinen jetzigen Wert ein, so erhalten wir

---

*) Acta mathematica Bd. 7. H. Poincaré, sur un théorème de M. Fuchs S. 3. Vergl. Wallenberg a. a. O. S. 268.

$$24a_2y^3+\left(24a_1a_2-4a_2'+a_2\frac{\psi'}{\psi}\right)y^2+\left(24a_0a_2+12a_1^2-4a_1'+a_1\frac{\psi'}{\psi}\right)y+$$
$$12a_0a_1-4a_0'+a_0\frac{\psi'}{\psi}=0.$$

Diese Gleichung muss für alle Werte von y erfüllt sein; demnach sind die Coefficienten der einzelnen Potenzen von y gleich 0 zu setzen.

Daraus folgt zunächst $a_2=0$, dass also φ_1 nur vom ersten Grade ist. Ferner resultieren die beiden Gleichungen

$$\text{(A)}\quad 4a_1'-12a_1^2-a_1\frac{\psi'}{\psi}=0$$

und

$$\text{(B)}\quad 4a_0'-12a_0a_1-a_0\frac{\psi'}{\psi}=0.$$

Diese Gleichungen sind mit (C) und (D) Seite 4 identisch, da ψ und die obige Funktion φ_2 dieselbe Bedeutung haben.

Diese Ausführungen gelten in gleicher Weise für die entsprechenden Gleichungen m^{ten} Grades, und wir kommen zu folgendem Ergebnis:

1. In den Fuchs'schen Differentialgleichungen von der Form $y'^m-m\varphi y'^{m-1}+(m-1)^{m-1}\psi=0$ vom vierten und höheren Grade ist die Funktion φ vom ersten Grade in y, und es sind in ihr die Variablen getrennt. Die Funktion ψ ist nur von z abhängig.

2. Diese Gleichungen sind vom Geschlechte $p=0$ und sind demnach mit Hülfe eines Parameters zu lösen.

II.

In diesem Abschnitt behandeln wir die Differentialgleichung von der Form

$$\text{(2)}\qquad F=y'^4+\psi_1y'^3+\psi_2y'^2+\psi_3=0.$$

Wir wenden wieder zur Bestimmung der Coefficienten die Relation von Poincaré an. Es ist dann:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\cdot y'^4+\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)y'^3+\frac{\partial\psi_2}{\partial z}y'^2+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}y'+\frac{\partial\psi_3}{\partial z}=$$
$$P(y'^4+\psi_1y'^3+\psi_2y'^2+\psi_3)+(R+Sy')\cdot(4y'^3+3\psi_1y'^2+2\psi_2y'),$$

wo P, R und S die Seite 9 angegebene Bedeutung haben.

Durch Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von y' erhalten wir folgende Gleichungen:

$$1)\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = P+4S, \qquad 2)\quad \frac{\partial\psi_2}{\partial y}+\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = P\psi_1+4R+3\psi_1 S,$$

$$3)\quad \frac{\partial\psi_2}{\partial z} = P\psi_2+3R\psi_1+2S\psi_2, \qquad 4)\quad \frac{\partial\psi_3}{\partial y} = 2R\psi_2,$$

$$5)\quad P\psi_3 = \frac{\partial\psi_3}{\partial z}.$$

Aus 5) folgt, da P eine ganze Funktion von y mit von z abhängigen Coefficienten sein soll, dass in ψ_3 die Variabeln getrennt sein müssen. Ferner ergiebt sich aus 4), dass $\frac{\frac{\partial\psi_3}{\partial y}}{\psi_2}$ eine ganze rationale Funktion von y mit von z abhängigen Coefficienten werden muss, da R diese Eigenschaft haben soll. Da nun in ψ_3 die Variabeln getrennt sind, so muss dasselbe auch in ψ_2 stattfinden.

Wir setzen deshalb $\psi_2 = \lambda\bar{\psi}_2$ und $\psi_3 = \mu\bar{\psi}_3$, wo λ und μ nur von z und $\bar{\psi}_2$ und $\bar{\psi}_3$ nur von y abhängig sind. Es ist nun $R = \frac{\mu}{2\lambda}\cdot\frac{\frac{\partial\bar{\psi}_3}{\partial y}}{\psi_2}$, und der Quotient $\frac{\frac{\partial\bar{\psi}_3}{\partial y}}{\psi_2}$ ist entweder eine Konstante oder eine ganze rationale Funktion von y.

1. Betrachten wir zunächst den ersten Fall, dann ist $R = \frac{k\cdot\mu}{2\lambda}$. Da nach der ersten Fuchs'schen Bedingung $\bar{\psi}_2$ höchstens vom vierten Grade in y sein darf, so kann $\bar{\psi}_3$ nur den fünften Grad erreichen.

Die oben aufgestellten Bedingungsgleichungen nehmen nun folgende Form an, wenn wir für P sogleich den sich ergebenden Wert $\frac{\mu'}{\mu}$ setzen:

$$1)\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = \frac{\mu'}{\mu}+4S,$$

$$2)\quad \lambda\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial y}+\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = \frac{\mu'}{\mu}\psi_1+2\frac{k\mu}{\lambda}+3S\psi_1,$$

$$3)\quad \lambda'\bar{\psi}_2 = \frac{\mu'}{\mu}\lambda\bar{\psi}_2+3\frac{k\mu}{2\lambda}\psi_1+2S\lambda\bar{\psi}_2.$$

Aus 3) geht hervor, dass $\frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2}$ eine ganze rationale Funktion von y werden muss, da S dieser Bedingung unterworfen ist. Die Folge

davon ist, dass erstens auch in ψ_1 die Variabeln getrennt sein müssen, und dass ferner ψ_1 in y von demselben oder höheren Grade als $\overline{\psi}_2$ ist oder, dass $\overline{\psi}_2$ y nicht enthält.

Um die beiden ersten Möglichkeiten zu erörtern, betrachten wir Gleichung 2)

$$\lambda \frac{\partial \overline{\psi}_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = P\psi_1 + 4R + 3\psi_1 S.$$

Hieraus ersehen wir erstens, dass ψ_1 und $\overline{\psi}_2$ nicht von demselben Grade in y sein dürfen, da dann S eine gebrochene Funktion von y werden würde, und zweitens ergiebt sich, dass dasselbe der Fall sein würde, wenn ψ_1 in y von höherem Grade als $\overline{\psi}_2$ wäre. Es ist also nur der letzte Fall möglich, dass nämlich $\overline{\psi}_2$ y nicht enthält.

Es sei nun $\psi_1 = \nu \cdot \overline{\psi}_1$, wo ν wieder eine Funktion von z und $\overline{\psi}_1$ eine Funktion von y allein bedeutet, und $\overline{\psi}_2 = a$. Dann gehen die Gleichungen auf Seite 9 in folgende über:

$$1) \quad \nu \frac{\partial \overline{\psi}_1}{\partial y} = \frac{\mu'}{\mu} + 4S,$$

$$2) \quad \nu' \overline{\psi}_1 = \frac{\mu'}{\mu} \nu \overline{\psi}_1 + \frac{2\mu}{a\lambda} + 3\nu \overline{\psi}_1 S, \text{*)}$$

$$3) \quad a\lambda' = \frac{\mu'}{\mu} a\lambda + \frac{3\mu\nu\overline{\psi}_1}{2a\lambda} + 2a\lambda S.$$

Aus 2) geht hervor, dass $\overline{\psi}_1$ eine Konstante sein muss, weil sonst entweder $\frac{2\mu}{a\lambda} = 0$ sein müsste oder S eine gebrochene Funktion von y würde, was beides unmöglich ist.

Dann folgt aus 1) $S = -\frac{\mu'}{4\mu}$, und wir erhalten, wenn wir $\psi_1 = c$ setzen, die beiden Gleichungen:

$$A) \quad c\nu' = \frac{c\mu'}{4\mu}\nu + \frac{2\mu}{a\lambda},$$

$$B) \quad a\lambda' = \tfrac{1}{2} a \frac{\mu'}{\mu}\lambda + \frac{3c\mu\nu}{2a\lambda}.$$

Setzen wir einstweilen $\nu^2 = \xi$, so ergiebt sich aus A) und B), nachdem wir A) mit $3c\nu$ und B) mit 4 multipliciert, die Differentialgleichung:

*) Die frühere Konstante k ist gleich $\frac{1}{a}$.

$$\text{C)} \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2(\frac{3}{2}c^2\xi' - 4a\lambda')}{\frac{3}{2}c^2\xi - 4a\lambda};$$

daraus folgt, wenn wir für ξ wieder v^2 zurücksetzen:

$$\mu = k_1(\tfrac{3}{2}c^2v^2 - 4a\lambda)^2,$$

wo k_1 die Integrationskonstante ist.

Substituieren wir den für μ erhaltenen Wert in A) und B), so müssen beide Gleichungen identisch werden, und wir gelangen zu der Gleichung

$$\text{A}_1) \quad 2acv\lambda' - 4ac\lambda v' = \frac{2k_1}{a\lambda}(\tfrac{3}{2}c^2v^2 - 4a\lambda)^3.$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, setzen wir

$$\tfrac{3}{2}c^2\frac{v^2}{\lambda} - 4a = v,$$

und A_1) wird:

$$-\tfrac{2}{3}\frac{a^2v'}{ck_1v^3} = v, \qquad \text{folglich} \quad \frac{a^2}{3ck_1v^2} = \int v dz + C.$$

Es sei $v = \omega'$, wo ω ebenso wie v eine beliebige Funktion von z bedeutet, und es ist nun

$$\omega + C = \frac{a^2}{3ck_1v^2},$$

demnach

$$3ck_1\left(\tfrac{3}{2}c^2\frac{v^2}{\lambda} - 4a\right)^2 = \frac{a^2}{\omega + C}.$$

Ersetzen wir nun ω durch $\frac{\varrho^2}{3c} - C$, wo ϱ eine beliebige Funktion von z ist, so folgt

$$v = \frac{2\varrho\varrho'}{3c} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{2\sqrt{k_1}\varrho^3\varrho'^2}{3a(4\varrho\sqrt{k_1}+1)}, \quad \mu = \frac{4k_1\varrho^4\varrho'^4}{9(4\varrho\sqrt{k_1}+1)}.$$

Die Coefficienten der Differentialgleichung (1) werden nun

$$\psi_1 = \tfrac{2}{3}\varrho\varrho' \quad \text{und} \quad \psi_2 = \frac{2\sqrt{k_1}\varrho^3\varrho'^2}{3(4\varrho\sqrt{k_1}+1)}.$$

Da ferner nach der Voraussetzung der Quotient $\frac{\partial\bar{\psi}_3}{\partial y}$ eine Konstante sein sollte, so muss $\bar{\psi}_3$ eine Funktion ersten Grades von y sein. Wir setzen $\bar{\psi}_3 = b + y$, und es wird

$$\psi_3 = \tfrac{4}{9}\frac{k_1\varrho^4\varrho'^4(b+y)}{(4\varrho\sqrt{k_1}+1)^2}.$$

Die Differentialgleichung nimmt demnach, wenn wir noch für die beliebige Konstante k_1 eine andere $\frac{1}{g^2}$ substituieren, folgende Form an:

$$y'^4 + \tfrac{2}{3}\varrho\varrho' y'^3 + \frac{2\varrho^3\varrho'^2 y'^2}{3(4\varrho+g)} + \tfrac{4}{9}\frac{\varrho^4\varrho'^4(b+y)}{(4\varrho+g)^2} = 0.$$

Führen wir die neue Variable $w = b+y$ ein, so erhalten wir schliesslich

$$w'^4 + \tfrac{2}{3}\varrho\varrho' w'^3 + \tfrac{2}{3}\frac{\varrho^3\varrho'^2 w'^2}{(4\varrho+g)} + \tfrac{4}{9}\frac{\varrho^4\varrho'^4 w}{(4\varrho+g)^2} = 0. \tag{2a}$$

Diese Differentialgleichung hat das Geschlecht $p = 0$, wie aus der Riemannschen Relation $w - 2m = 2(p-1)$ folgt*). Zu ihrer Lösung benutze ich die Substitution $w' = \varrho\varrho' t$. Dann wird

$$w = -\tfrac{9}{4}(4\varrho+g)^2 t^4 - \tfrac{3}{2}(4\varrho+g)^2 t^3 - \tfrac{3}{2}\varrho(4\varrho+g)t^2.$$

Diese Gleichung differenzieren wir und vergleichen mit dem Resultat den obigen Wert von w'. Nach einigen Rechnungen erhalten wir für t die Differentialgleichung

$$t' = \frac{-\varrho'}{4\varrho+g}\left(\frac{6t+1}{3}\right).$$

Daraus folgt

$$t = \frac{C_1 - \sqrt{4\varrho+g}}{6\sqrt{4\varrho+g}}$$

und

$$w = -\frac{48\varrho^2 - 16C_1\varrho\sqrt{4\varrho+g} + 8C_1 g\sqrt{4\varrho+g}}{24^2} - \frac{C_1^4 - 6C_1^2 g - 3g^2}{24^2}.$$

1a. Im Anschluss an das Vorstehende behandeln wir jetzt die Gleichung

$$y'^4 + \psi_2 y'^2 + \psi_3 = 0. \tag{2}$$

Wir haben also in den Bedingungsgleichungen auf Seite 11 $\psi_1 = 0$ zu setzen und erhalten:

1) $P + 4S = 0$, 2) $\frac{\partial\psi_2}{\partial y} = 4R$, 3) $\frac{\partial\psi_2}{\partial z} = \psi_2(P+2S)$,

*) Vergl. die Abhandlung von Fuchs, Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften 1884, S. 710.

$$4)\quad \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = 2R\psi_2, \qquad 5)\quad P = \frac{\dfrac{\partial \psi_3}{\partial z}}{\psi_3}.$$

Aus 3) und 5) folgt wie früher, dass die Variabeln getrennt sein müssen, und es sei wieder $\psi_2 = \lambda\bar{\psi}_2$ und $\psi_3 = \mu\bar{\psi}_3$, wo λ, μ, $\bar{\psi}_2$ und ψ_3 dieselbe Eigenschaft wie im obigen Falle haben. Der Quotient $\dfrac{\dfrac{\partial \bar{\psi}_3}{\partial y}}{\psi_2}$ ist nun wieder eine Konstante oder eine ganze rationale Funktion von y. Wegen der Gleichung 2) können wir aber diesmal beide Fälle gleichzeitig behandeln. Aus 1), 3) und 5) ergiebt sich

$$A)\quad \frac{\mu'}{\mu} = 2\frac{\lambda'}{\lambda} \quad \text{und demnach} \quad \mu = C\lambda^2,$$

aus 2) und 4)

$$B)\quad C\frac{\partial \psi_3}{\partial y} = \tfrac{1}{2}\psi_2\frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial y},$$

und durch Integration

$$C\bar{\psi}_3 = \frac{\bar{\psi}_2^2}{4} + k.$$

Die Differentialgleichung nimmt also folgende Form an:

$$y'^4 + \lambda\psi_2 y'^2 + \lambda^2\left(\frac{\psi_2^2}{4} + k\right) = 0.$$

Sie ist aber reduktibel, denn sie zerfällt in die beiden Gleichungen zweiten Grades

$$y'^2 + \lambda\left(\frac{\bar{\psi}_2}{2} - \sqrt{-k}\right) = 0 \quad \text{und} \quad y'^2 + \lambda\left(\frac{\bar{\psi}_2}{2} + \sqrt{-k}\right) = 0.$$

Ebenso würden wir zu einer reduktiblen Differentialgleichung gelangen, wenn $\dfrac{\dfrac{\partial \bar{\psi}_3}{\partial y}}{\psi_2} = 0$ wäre. Dann würden sogar ψ_2 und ψ_3 von y unabhängig sein müssen.

Wir kommen also zu dem Resultat, dass irreduktible Fuchs'sche Differentialgleichungen von der Form $y'^4 + \psi_2 y'^2 + \psi_3 = 0$ nicht existieren.

2. Im ersten Teil dieses Abschnittes hatten wir die Voraussetzung gemacht, dass der Quotient $\dfrac{\dfrac{\partial \bar{\psi}_3}{\partial y}}{\psi_2}$ eine Konstante sei. Wir

betrachten nun den Fall, dass diese Konstante Null wird, dass also $R = 0$ ist. Dann nehmen die Seite 9 für die Coefficienten der Differentialgleichung aufgestellten Bedingungsgleichungen folgende Form an:

$$1)\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = P + 4S, \qquad 2)\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = P\psi_1 + 3\psi_1 S,$$

$$3)\ \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \psi_2(P + 2S), \qquad 4)\ \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = 0, \qquad 5)\ P\psi_3 = \frac{\partial \psi_3}{\partial z}.$$

Wenn wir die früheren Bezeichnungen λ und μ, ψ_2 und $\overline{\psi}_3$ in derselben Bedeutung beibehalten, so ergiebt sich aus 4), da ψ_3 von y unabhängig sein muss, dass $\overline{\psi}_3$ eine Konstante ist. Dann wird $P = \frac{\mu'}{\mu}$, und da in 3) wieder die Variabeln getrennt sein müssen, so erhält diese Gleichung die Form 3) $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\mu'}{\mu} + 2S$. Nun resultieren aus 1), 2) und 3) nach Elimination von S die Gleichungen

$$A)\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 2\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\mu'}{\mu}$$

und

$$B)\ \lambda \frac{\partial \overline{\psi}_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = -\tfrac{1}{2}\frac{\mu'}{\mu}\psi_1 + \tfrac{3}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}\psi_1.$$

Die Folge von A) ist, dass ψ_1 in y höchstens vom ersten Grade sein kann, da λ und μ nur von z abhängig sind. Dann geht aus B) hervor, dass $\overline{\psi}_2$ vom zweiten Grade in y ist.

Es sei nun zunächst $\psi_1 = a_0 + a_1 y$ und $\overline{\psi}_2 = b_0 + b_1 y + b_2 y^2$, wo die a Funktionen von z und die b Konstanten sind. Setzen wir diese Werte in A) und B) ein, dann erhalten wir:

$$A)\ a_1 = 2\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\mu'}{\mu};$$

$$B)\ \lambda(b_1 + 2b_2 y) + a_0' + a_1' y = \frac{3\lambda'}{2\lambda}(a_0 + a_1 y) - \frac{\mu'}{2\mu}(a_0 + a_1 y).$$

Aus B) ergeben sich durch Vergleichung der Coefficienten der gleich hohen Potenzen von y die Gleichungen:

$$C)\ \lambda b_1 + a_0' = \tfrac{3}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}a_0 - \frac{\mu'}{2\mu}a_0$$

und

$$D)\ 2\lambda b_2 + a_1' = \tfrac{3}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}a_1 - \frac{\mu'}{2\mu}a_1.$$

Durch Elimination von $\frac{\mu'}{\mu}$ aus A) und D) entsteht

$$D_1) \quad 2\lambda b_2 + a_1' = \frac{\lambda'}{2\lambda} a_1 + \frac{a_1^2}{2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{2a_1'}{a_1} + 4\frac{\lambda b_2}{a_1} - a_1,$$

und, wenn wir $v = \frac{1}{\lambda}$ setzen, für v die Differentialgleichung

$$v' + \left(2\frac{a_1'}{a_1} - a_1\right)v + 4\frac{b_2}{a_1} = 0;$$

dann ist

$$v = c \cdot e^{\int\left(a_1 - 2\frac{a_1'}{a_1}\right)dz} - e^{\int\left(a_1 - 2\frac{a_1'}{a_1}\right)dz} \cdot 4b_2 \cdot \int \frac{1}{a_1} \cdot e^{\int\left(2\frac{a_1'}{a_1} - a_1\right)dz} \cdot dz$$

oder

$$v = \frac{c}{a_1^2} \cdot e^{\int a_1 dz} - \frac{4b_2}{a_1^2} \cdot e^{\int a_1 dz} \cdot \int a_1 dz \cdot e^{-\int a_1 dz}.$$

Wenn wir v und a_1 der Bedingung unterwerfen, dass sie rational sind, dann können wir, da c eine willkürliche Konstante ist, $a_1 = -\frac{\nu'}{\nu}$ setzen, wo ν ebenfalls eine rationale Funktion von z ist. Wir erhalten nun

$$v = \frac{c}{a_1^2 \nu} + \frac{4b_2}{a_1^2 \nu} \cdot \int \nu' dz, \quad \text{also} \quad \frac{c\nu + 4b_2\nu^2}{\nu'^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Es war $a_1 = \frac{2\lambda'}{\lambda} - \frac{\mu'}{\mu}$; substituieren wir für a_1 seinen nunmehrigen Wert, so wird

$$A) \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2\lambda'}{\lambda} + \frac{\nu'}{\nu}.$$

Daraus folgt, wenn wir in μ den konstanten Faktor ψ_3 hineinziehen, $\psi_3 = \mu = k \cdot \nu \cdot \lambda^2$; drücken wir λ durch ν aus, so ist $\psi_3 = \frac{k \cdot \nu'^4}{\nu(c + 4b_2\nu)^2}$. — Um a_0 zu bestimmen, setze ich in C) $a_0 = a_1\beta$; dann ist

$$\frac{\lambda b_1}{a_1 \beta} + \frac{\beta'}{\beta} + \frac{a_1'}{a_1} = \frac{3}{2}\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\mu'}{2\mu}.$$

Durch Vereinigung dieser Gleichung mit D) folgt für β die Differentialgleichung

$$\beta' - 2\frac{b_2\lambda\beta}{a_1} + \frac{b_1\lambda}{a_1} = 0;$$

demnach

$$\beta = C\cdot c^{\int 2\frac{\lambda b_2}{a_1}dz} - b_1 c^{\int 2\frac{\lambda b_2}{a_1}dz}\cdot\int\frac{\lambda}{a_1}\cdot e^{-\int 2\frac{\lambda b_2}{a_1}dz}\cdot dz.$$

$\frac{\lambda}{a_1}$ drücken wir durch ν aus; es ist dann $\frac{\lambda}{a_1} = -\frac{\nu'}{c+4b_2\nu}$. Für $(c+4b_2\nu)$ substituieren wir ϱ^2 und erhalten $\frac{\lambda}{a_1} = -\frac{\varrho'}{2b_2\varrho}$; diesen Wert von $\frac{\lambda}{a_1}$ setzen wir nun in den Ausdruck von β ein, und die Gleichung nimmt folgende Form an:

$$\beta = C\cdot e^{-\int\frac{\varrho'}{\varrho}dz} - b_1\cdot e^{-\int\frac{\varrho'}{\varrho}dz}\cdot\int -\frac{\varrho'}{2b_2\varrho}\cdot e^{\int\frac{\varrho'}{\varrho}dz}\cdot dz.$$

Daraus ergiebt sich

$$\beta = \frac{C}{\varrho} + \frac{b_1}{2b_2}$$

und infolge dessen

$$a_0 = a_1\left(\frac{C}{\varrho} + \frac{b_1}{2b_2}\right).$$

Die Coefficienten a_0, a_1, λ und μ sind nun alle durch die Funktion ϱ darzustellen, und es wird:

$$a_0 = -2\frac{\varrho\varrho'}{\varrho^2-c}\left(\frac{C}{\varrho} + \frac{b_1}{2b_2}\right), \qquad a_1 = -2\frac{\varrho\varrho'}{\varrho^2-c}\cdot$$

$$\lambda = \frac{\varrho'^2}{b_2(\varrho^2-c)} \quad \text{und} \quad \mu = \psi_3 = \frac{k\varrho'^4}{4b_2^3(\varrho^2-c)}.$$

Nun erhält die Differentialgleichung (2) folgende Gestalt:

$$y'^4 - \frac{2\varrho\varrho'}{\varrho^2-c}\left(\frac{C}{\varrho} + \frac{b_1}{2b_2} + y\right)y'^3 + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2-c}\left(\frac{b_0}{b_2} + \frac{b_1}{b_2}y + y^2\right)y'^2 + \frac{k\varrho'^4}{4b_2^3(\varrho^2-c)} = 0.$$

Wir setzen

$$\frac{b_0}{b_1} = \alpha_0, \qquad \frac{b_1}{2b_2} = \alpha_1, \qquad \alpha_0 - \alpha_1^2 = \varepsilon$$

und führen für y die neue Variable $w = y + \alpha_1$ ein; wenn wir ferner die Konstante k, welche den Wert 0 nicht annehmen darf, weil die Gleichung sonst reduktibel würde, die aber im übrigen

beliebig ist, mit $4b_2^3$ vereinigen, so können wir, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, $\frac{k}{4b_2^3} = -1$ annehmen.

Die Gleichung (2) geht dann über in:

$$(2b) \quad w'^4 - 2\frac{\varrho\varrho'}{\varrho^2 - c}\left(\frac{C}{\varrho} + w\right)w'^3 + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2 - c}(\varepsilon + w^2)w'^2 - \frac{\varrho'^4}{\varrho^2 - c} = 0.$$

Die Diskriminante der allgemeinen Differentialgleichung

$$w'^4 + 4\psi_1 w'^3 + 2\psi_2 w'^2 + \psi_3 = 0$$

lautet

$$D = -\psi_3[(\psi_2^2 - \psi_3)^2 - 2\psi_1^2\psi_2^3 + 18\psi_1^2\psi_2\psi_3 - 27\psi_1^4\psi_3].$$

Daraus geht hervor, dass die Diskriminante der Differentialgleichung (2b) im allgemeinen vom achten Grade in w ist. Demnach hat (2b) infolge der Riemannschen Relation das Geschlecht $p = 1$. Sind die Konstanten C, c und ε gleich Null, so ist D nur vom vierten Grade in w, weil sich die achten Potenzen aufheben. Die Differentialgleichung hat also in diesem Falle das Geschlecht $p = 0$. Ausserdem wird sie reduktibel, sie zerfällt in die beiden Differentialgleichungen zweiten Grades

$$w'^2 - \frac{\varrho'}{\varrho}ww' + \frac{\varrho'^2}{\varrho} = 0 \quad \text{und} \quad w'^2 - \frac{\varrho'}{\varrho}ww' - \frac{\varrho'^2}{\varrho} = 0.$$

Sind nur C und ε gleich Null, so behält D in w den achten Grad, die Differentialgleichung bewahrt also das Geschlecht des allgemeinen Falles. Zur Lösung desselben setzen wir $w' = \frac{\varrho'}{t}$. Wir erhalten dann:

$$w = \frac{\varrho + \sqrt{t^4 - \varepsilon t^2 + 2Ct + c}}{t}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung ergiebt:

$$w' = \frac{\varrho'}{t} - \frac{\varrho t'}{t^2} + \frac{(4t^3 - 2\varepsilon t + 2C)t'}{t\sqrt{t^4 - \varepsilon t^2 + 2Ct + c}} - \frac{t'}{t^2}\sqrt{t^4 - \varepsilon t^2 + 2Ct + c}.$$

Durch Vergleichung dieses mit dem obigen Wert von w' entsteht für t die Differentialgleichung: $t' = 0$. Demnach ist

$$t = k \quad \text{und} \quad w = \frac{\varrho}{k} + \frac{1}{k}\sqrt{k^4 - \varepsilon k^2 + 2Ck + c}.$$

w ist also in diesem Falle eine rationale Funktion von ϱ; ϱ braucht aber in z nicht rational zu sein, da wir bei der Bestimmung der

Coefficienten der Differentialgleichung (2) auf Seite 15 nur die Bedingung gestellt haben, dass v und a_1 rational sein sollten. Wir hatten ϱ^2 für $c+4b_2v$ substituiert, wo v wegen der Abhängigkeit von a_1 rational sein muss. ϱ ist also im allgemeinen eine Quadratwurzel aus einer beliebigen rationalen Funktion von z.

Haben wir z. B. die Differentialgleichung

$$w'^4 - \left(\frac{C}{\sqrt{z-a}} + w\right)\frac{w'^3}{z-a-c} + \frac{(\varepsilon + w^2)\,w'^2}{4(z-a)(z-a-c)} - \frac{1}{16(z-a)^2(z-a-c)} = 0,$$

wo $\varrho = \sqrt{z-a}$ ist, so wird

$$w = \frac{\sqrt{z-a}}{k} + \frac{1}{k}\sqrt{k^4 - \varepsilon k^2 + 2Ck + c}.$$

Aus der Form des Integrals geht hervor, dass die Verzweigungsstellen der Funktion w fest sind; denn w verzweigt sich nur für $z = a$ und $z = \infty$. Die Lösung des besonderen Falles der Differentialgleichung, dass nämlich die Konstanten C und ε gleich Null sind, ist in der des allgemeinen enthalten; es ist dann

$$w = \frac{\varrho}{k} + \frac{1}{k}\sqrt{k^4 + c}.$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass das Integral algebraischer Natur ist, trotzdem das Geschlecht der Differentialgleichung $p = 1$ ist, und dann im allgemeinen die Lösung auf elliptische Funktionen führt*).

2a. Wir erhielten auf Seite 14 unter der Voraussstzung, dass $R = 0$ sei, für die Coefficienten der Differentialgleichung die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\text{A)}\quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 2\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\mu'}{\mu} \quad \text{und} \quad \text{B)}\quad \lambda\frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = -\tfrac{1}{2}\frac{\mu'}{\mu}\psi_1 + \tfrac{3}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}\psi_1.$$

Dort hatten wir $\psi_1 = a_0 + a_1 y$ gesetzt; wir können nun zweitens annehmen, dass ψ_1 von y unabhängig ist. Dann muss $\bar{\psi}_2$ vom ersten Grade in y sein. Es sei $\psi_1 = v$, wo v nur von z abhängig ist und $\bar{\psi}_2 = y$.

---

*) Vgl. Poincaré a. a. O. Seite 7 und Wallenberg a. a. O. Seite 195; ferner Painlevé, Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre. Annales scientifiques de l'École normale supérieure. Paris 1891, Seite 216.

Die Bedingungsgleichungen nehmen nun folgende Gestalt an:

$$\text{A)}\quad \frac{\mu'}{\mu} = 2\frac{\lambda'}{\lambda}, \qquad \text{B)}\quad \lambda + \nu' = \frac{\mu'}{4\mu}\nu.$$

Aus A) resultiert $\mu = k \cdot \lambda^2$ und durch Vereinigung von A) und B) entsteht für ν die Differentialgleichung

$$\nu' - \frac{\lambda'}{2\lambda}\nu + \lambda = 0;$$

es ist also

$$\nu = C \cdot e^{\int \frac{\lambda'}{2\lambda} dz} - e^{\int \frac{\lambda'}{2\lambda} dz} \cdot \int \lambda e^{-\int \frac{\lambda'}{2\lambda} dz} \cdot dz.$$

Daraus folgt

$$\nu = C\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\int \sqrt{\lambda}\, dz.$$

Sind ν und λ rationale Funktionen von z, so muss $\sqrt{\lambda}$ und auch $\int \sqrt{\lambda}\, dz$ rational sein, also muss $\sqrt{\lambda}$ die Form ϱ' haben, wo ϱ ebenfalls eine rationale Funktion von z ist. Ist dagegen die Bedingung der Rationalität nicht gestellt, sondern, dass ν und λ algebraischer Natur sind, so kann im allgemeinen in λ unter der Wurzel z nur in der ersten Potenz vorkommen. Wenn wir dann $\sqrt{\lambda} = \varrho'$ setzen, sind ϱ' und ϱ algebraische Funktionen von z.

Wir substituieren also $\sqrt{\lambda} = \varrho'$, dann ist $\nu = C\varrho' - \varrho\varrho'$, und die Differentialgleichung (2) erhält die Form:

$$y'^4 + (C - \varrho)\varrho' y'^3 + \varrho'^2 y y'^2 + k\varrho'^4 = 0; \qquad p = 0.$$

Zur Lösung diene die Substitution $y' = \varrho' t$. Infolge dessen wird

$$y = -t^2 - Ct + \varrho t - \frac{k}{t^2},$$

und es ergiebt sich für t wiederum die Differentialgleichung:

$$t' = 0, \quad \text{also} \quad t = c \quad \text{und} \quad y = -c^2 - Cc + c\varrho - \frac{k}{c^2}.$$

Das Integral ist auch in diesem Falle eine rationale Funktion von ϱ; es kann aber ϱ eine algebraische Funktion von z sein*). Ist also ϱ irrational, so sind die Verzweigungsstellen von y in ϱ enthalten und von den Anfangswerten unabhängig.

3. Es mögen nun noch einige allgemeine Bemerkungen über die Coefficienten der Differentialgleichung

*) Allerdings mit der oben angegebenen Beschränkung.

$$(2) \quad y'^4 + \psi_1 y'^3 + \psi_2 y'^2 + \psi_3 = 0$$

folgen, die sich aus den Seite 9 aufgestellten Bedingungsgleichungen ergeben.

a. Aus 5) folgt, dass in jedem Falle in ψ_3 die Variabeln getrennt sein müssen und dass daher P immer von y unabhängig ist.

b. Die Fälle, wo erstens ψ_3 in y vom ersten Grade und zweitens von y unabhängig war, sind im ersten und zweiten Teil dieses Abschnittes behandelt worden.

Wäre nun weiter ψ_3 vom zweiten Grade in y und ψ_2 vom ersten Grade, dann wäre R von y unabhängig, und es ginge aus 3) hervor, dass ψ_1 ebenfalls vom ersten Grade sein müsste. Damit steht aber 2) im Widerspruch; denn S würde eine gebrochene Funktion von y werden.

Nehmen wir zweitens an, dass bei der oben vorausgesetzten Beschaffenheit von ψ_3 der Coefficient ψ_2 nur x enthalte, dann müsste ψ_1 dieselbe Eigenschaft haben. Es würde aber einerseits aus 4) folgen, dass R vom ersten Grade in y wäre und andrerseits aus 2) und 3), dass es von y unabhängig sein müsste, weil sonst auch S eine Funktion von y wäre, was bei der gemachten Voraussetzung nicht geschehen kann.

Demnach sind Fuchs'sche Differentialgleichungen der Form

$$y'^4 + \psi_1 y'^3 + \psi_2 y'^2 + \psi_3 = 0,$$

in denen ψ_1 und ψ_2 von y abhängig oder unabhängig sind und ψ_3 vom zweiten Grade in y ist, nicht möglich. Dasselbe ergiebt sich, wenn ψ_3 von noch höherem Grade in y ist, ψ_1 und ψ_2 dagegen von y unabhängig sind.

c. In allen anderen Fällen, d. h., wenn in ψ_1 und ψ_2 die Variable y vorkommt und ψ_3 von höherem als dem zweiten Grade ist, muss nach 4) $\bar{\psi}_2$, wo $\bar{\psi}_2$ von x frei ist, ein quadratischer Faktor von $\bar{\psi}_3$ sein, wo $\bar{\psi}_3$ wie früher ebenfalls von x unabhängig ist. Wenn wir demnach die Voraussetzung machen, dass $\bar{\psi}_3$ nur einfache Faktoren in y enthält, so existieren auch Fuchs'sche Differentialgleichungen in dieser Form nicht.

III.

Wir wollen nunmehr die Differentialgleichungen von der Form

(3) $$y'^4 + \psi_1 y'^2 + \psi_2 y' + \psi_3 = 0$$

untersuchen.

Mit Hülfe der Relation von Poincaré entstehen für die Coefficienten folgende Bedingungsgleichungen:

$$1)\quad P + 4S = 0, \qquad 2)\quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 4R,$$

$$3)\quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = P\psi_1 + 2\psi_1 S,$$

$$4)\quad \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = P\psi_2 + 2R\psi_1 + S\psi_2, \qquad 5)\quad \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = P\psi_3 + R\psi_2.$$

1. Ist zuerst R = 0, so geht aus 2) hervor, dass ψ_1 von y unabhängig ist; wir setzen deshalb $\psi_1 = \nu$, wo ν eine Funktion von z allein ist. Dann folgt aus 5), dass in ψ_3 die Variabeln getrennt sein müssen. Wenn wie früher $\psi_3 = \mu\bar{\psi}_3$ ist, so wird wieder $P = \frac{\mu'}{\mu}$ und infolge davon $S = -\frac{\mu'}{4\mu}$. Die Bedingungsgleichungen 3) und 4) gehen nun in folgende über:

$$3)\quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \nu' = \frac{\mu'}{2\mu}\nu$$

und

$$4)\quad \mu \cdot \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \tfrac{3}{4}\frac{\mu'}{\mu} \cdot \psi_2.$$

3) zeigt, dass ψ_2 entweder von y unabhängig oder vom ersten Grade in y ist. Nehmen wir den ersten Fall, so ergiebt sich aus 4), dass $\bar{\psi}_3$ vom ersten Grade in y sein muss. Wir setzen $\psi_2 = \lambda$ und $\bar{\psi}_3 = a_0 + a_1 y$. Dann erhalten wir

$$\text{A)}\quad \nu' = \frac{\mu'}{2\mu}\nu \quad \text{und} \quad \text{B)}\quad a_1\mu + \lambda' = \tfrac{3}{4}\frac{\mu'}{\mu}\lambda.$$

Aus A) folgt

$$\nu = C\sqrt{\mu}$$

und aus B)

$$\lambda = k \cdot e^{\int \frac{3}{4}\frac{\mu'}{\mu} dz} - e^{\int \frac{3}{4}\frac{\mu'}{\mu} dz} \cdot \int a_1 \mu\, dz\, e^{-\int \frac{3}{4}\frac{\mu'}{\mu} dz},$$

also

$$\lambda = k \cdot \mu^{\frac{3}{4}} - a_1 \cdot \mu^{\frac{3}{4}} \int \mu^{\frac{1}{4}} dz.$$

Setzen wir $\mu^{\frac{1}{4}} = \varrho'$ *), so wird $\lambda = k\varrho'^3 - a_1 \varrho \varrho'^3$, und die Differentialgleichung (3) nimmt folgende Gestalt an:

$$y'^4 + C\varrho'^2 y'^2 + \varrho'^3 (k - a_1 \varrho) y' + \varrho'^4 (a_0 + a_1 y) = 0.$$

Führen wir die neue Variable $w = a_0 + a_1 y$ ein, so geht (3) in

(3a) $$w'^4 + Ca_1^2 \varrho'^2 w'^2 + a_1^3 \varrho'^3 (k - a_1 \varrho) w' + a_1^4 \varrho'^4 w = 0$$

über. Für die Konstante a_1 können wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit 1 setzen, so dass wir schliesslich haben

(3a) $$w'^4 + C\varrho'^2 w'^2 + \varrho'^3 (k - \varrho) w' + \varrho'^4 w = 0.$$

Es ist $p = 0$, und mit Hülfe der Substitution $w' = \varrho' t$ ergiebt sich

$$w = c\varrho - c^4 - ck - Cc^2,$$

wo ϱ eine beliebige Funktion von z und c die Integrationskonstante ist.

Ist zweitens ψ_2 vom ersten Grade in y, so sei

$$\psi_2 = a_0 + a_1 y,$$

wo die a Funktionen von z sind. Die obigen Bedingungsgleichungen 3) und 4) werden nun

$$3) \quad a_1 + \nu' = \frac{\mu'}{2\mu} \nu$$

und

$$4) \quad \mu \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + a_0' + a_1' y = \tfrac{3}{4} \frac{\mu'}{\mu} (a_0 + a_1 y).$$

Aus 4) folgt, dass ψ_3 entweder von y unabhängig oder vom ersten oder zweiten Grade in y sein kann.

Im ersten Falle entsteht nach ähnlichen Rechnungen, wie vorher, die Differentialgleichung:

(3b) $$w'^4 + (C - \varrho) \varrho'^2 w'^2 + \varrho'^3 w w' + \varrho'^4 = 0,$$

deren Lösung $w = \varrho k - Ck - k^3 - \frac{1}{k}$ ist.

Zweitens kann ψ_3 vom ersten Grade in y sein. Es sei

$$\psi_3 = b_0 + b_1 y;$$

*) Hier gilt mit den nötigen Aenderungen das Seite 19 Gesagte.

dann ist

$$3) \quad a_1 + \nu' = \frac{\mu'}{2\mu}\nu$$

und

$$4) \quad \mu b_1 + a_0' + a_1' y = \tfrac{3}{4}\frac{\mu'}{\mu}(a_0 + a_1 y).$$

Aus 4) folgen durch Vergleichung der Coefficienten der gleich hohen Potenzen von y

$$\alpha) \quad \mu b_1 + a_0' = \tfrac{3}{4} a_0 \frac{\mu'}{\mu}$$

und

$$\beta) \quad a_1' = \tfrac{3}{4}\frac{\mu'}{\mu} a_1.$$

In diesem Falle können wir die Funktionen μ und a_0 bestimmen, indem wir $\frac{\mu^3}{a_0^4} = \lambda^4$ setzen*), wo μ, a_0 und λ beliebige Funktionen von z sind. Dann folgt aus α) $\frac{\mu b_1}{a_0} = \frac{\lambda'}{\lambda}$; demnach $\mu = \frac{\lambda'^4}{b_1^4 \lambda^8}$ und $a_0 = \frac{\lambda'^3}{b_1^3 \lambda^7}$.

Ferner erhalten wir aus β)

$$a_1 = k_1 \mu^{\frac{3}{4}} = \frac{k_1 \lambda'^3}{b_1^3 \lambda^6}$$

und schliesslich aus 3)

$$\nu = k_0 \sqrt{\mu} - k_1 \sqrt{\mu} \int \mu^{\frac{1}{4}} dz.$$

Also

$$\nu = \frac{k_0 \lambda'^2}{b_1^2 \lambda^4} + \frac{k_1 \lambda'^2}{b_1^3 \lambda^5}.$$

Die Differentialgleichung (3) erhält demnach die Form

$$(3c) \quad y'^4 + \frac{\lambda'^2}{b_1^2 \lambda^4}\left(k_0 + \frac{k_1}{b_1 \lambda}\right) y'^2 + \frac{\lambda'^3}{b_1^3 \lambda^6}\left(\frac{1}{\lambda} + k_1 y\right) y' + \frac{\lambda'^4 (b_0 + b_1 y)}{b_1^4 \lambda^8} = 0.$$

Wir führen die neue Variable $w = b_0 + b_1 y$ ein, und es entsteht die Differentialgleichung:

$$(3c) \quad w'^4 + \frac{\lambda'^2}{\lambda^4}\left(k_0 + \frac{a}{\lambda}\right) w'^2 + \frac{\lambda'^3}{\lambda^6}\left(\frac{1}{\lambda} + a(w - b_0)\right) w' + \frac{\lambda'^4}{\lambda^8} w = 0,$$

*) Vgl. Wallenberg a. a. O. S. 218. Diese Methode ist auch in verschiedenen früheren Fällen anwendbar.

wo $\frac{k_1}{b_1} = a$ gesetzt ist. Zur Lösung wende ich die Substitution $w' = \frac{\lambda' t}{\lambda^2}$ an, und die Differentialgleichung für t wird wieder, wie in früheren Fällen, $t' = 0$, also $t = c$. Demnach lautet das Integral

$$w = -\frac{c^4 + \left(k_0 + \frac{a}{\lambda}\right)c^2 + \left(\frac{1}{\lambda} - ab_0\right)c}{ac+1}.$$

Wenn ψ_3 vom zweiten Grade ist, $\overline{\psi}_3$ möge dann gleich $b_0 + b_1 y + b_2 y^2$ sein, so nehmen die Bedingungsgleichungen 3) und 4) folgende Form an:

$$3) \quad a_1 + \nu' = \frac{\mu'}{2\mu}\nu,$$

$$4) \quad \mu(b_1 + 2b_2 y) + a_0' + a_1' y = \tfrac{3}{4}\frac{\mu'}{\mu}(a_0 + a_1 y).$$

Aus 4) erhalten wir durch Vergleichung der Potenzen von y die beiden Gleichungen:

$$A) \quad \mu b_1 + a_0' = \tfrac{3}{4}\frac{\mu'}{\mu}a_0,$$

$$B) \quad 2b_2\mu + a_1' = \tfrac{3}{4}\frac{\mu'}{\mu}a_1.$$

Aus A) folgt

$$a_0 = c_0\mu^{\frac{3}{4}} - b_1\mu^{\frac{3}{4}}\int \mu^{\frac{1}{4}} dz.$$

Substituieren wir wieder $\mu^{\frac{1}{4}} = \varrho'$*), so wird

$$a_0 = \varrho'^3(c_0 - b_1\varrho).$$

In derselben Weise ergiebt sich aus B)

$$a_1 = \varrho'^3(c_1 - 2b_2\varrho).$$

Nun entsteht für ν aus 3) die Differentialgleichung:

$$\nu' - \frac{\mu'}{2\mu}\nu + \varrho'^3(c_1 - 2b_2\varrho) = 0,$$

und infolge dessen ist

$$\nu = c_2\mu^{\frac{1}{2}} - \mu^{\frac{1}{2}}\int \frac{\varrho'^3(c_1 - 2b_2\varrho)\,dz}{\mu^{\frac{1}{2}}}.$$

*) Vgl. Seite 19.

Setzen wir für μ den obigen Wert ein, so bekommen wir

$$\nu = \varrho'^2(c_2-(c_1\varrho-b_2\varrho^2)).$$

Demnach nimmt die Differentialgleichung (3) folgende Gestalt an:

$$y'^4+\varrho'^2(c_2-c_1\varrho+b_2\varrho^2)y'^2+\varrho'^3(c_0-b_1\varrho+(c_1-2b_2\varrho)y)y'+$$
$$\varrho'^4(b_0+b_1y+b_2y^2) = 0.$$

Diese Gleichung formen wir um, indem wir folgende Substitutionen machen:

$$\frac{c_2}{b_2}-\left(\frac{c_1}{2b_2}\right)^2 = \varepsilon_0, \qquad \frac{c_0}{2b_2}-\frac{b_1c_1}{4b_2^2} = \varepsilon_1, \qquad \frac{b_0}{b_2}-\frac{b_1}{2b_2} = \varepsilon_2$$

$$\text{und} \quad \frac{c_1}{2b_2}-\varrho = \omega.$$

Ausserdem führen wir die neue Variable $v = y+\frac{b_1}{2b_2}$ ein. Dann wird (3) auf folgende Gleichung reduziert:

(3d) $$v'^4+b_2\omega'^2(\varepsilon_0+\omega^2)v'^2-2b_2\omega'^3(\varepsilon_1+\omega v)v'+b_2\omega'^4(\varepsilon_2+v^2) = 0.$$

$$p = 1.$$

Wir wenden wieder die Substitution $v' = \omega' t$ an und erhalten dann

$$v = \omega t+\sqrt{-\frac{t^4}{b_2}-\varepsilon_0t^2+2\varepsilon_1t-\varepsilon_2}.$$

Für t ergiebt sich dann wie früher die Differentialgleichung $t' = 0$; demnach $t = k$; infolge dessen ist

$$v = \omega k+\sqrt{-\frac{k^4}{b_2}-\varepsilon_0k^2+2\varepsilon_1k-\varepsilon_2}.$$

In Bezug auf die Form des Integrals gilt hier dasselbe, was S. 18 bemerkt wurde.

Die zuletzt behandelten Differentialgleichungen lassen sich auch mit der von Herrn Wallenberg benutzten Methode leicht lösen*). Differenziert man nämlich die Differentialgleichung $F = 0$ nach x, so erhält man

$$y'' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'}{\frac{\partial F}{\partial y'}}.$$

*) Wallenberg a. a. O. Seite 269.

Nun gilt für die Fuchs'schen Differentialgleichungen die Relation von Poincaré, und wir können infolge dessen für

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

den identischen Wert

$$PF + Q \frac{\partial F}{\partial y'}$$

setzen. Demnach wird

$$y'' = -\frac{PF + Q \frac{\partial F}{\partial y'}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}.$$

Da nun $F = 0$ ist, so ergiebt sich schliesslich

$$y'' = -Q;$$

Q ist in jedem Falle leicht zu bestimmen.

Wenden wir diese Methode auf die zuletzt gelöste Differentialgleichung an, so erhalten wir, da $Q = R + Sv'$, $R = 0$ und $S = -\frac{\omega''}{\omega'}$ ist,

$$v'' = \frac{\omega''}{\omega'} v'.$$

Daraus folgt

$$v' = k_1 \omega' \quad \text{und} \quad v = k_1 \omega + k_2.$$

In diesem Resultat haben wir die zweite Integrationskonstante durch die erstere auszudrücken, oder, mit anderen Worten, wir haben die Relation zwischen beiden herzustellen. Dies erreichen wir, wenn wir die Werte von v und v' in die vorliegende Differentialgleichung setzen. So entsteht die Relation

$$k_1^4 + b_2 \varepsilon_0 k_1^2 - 2 b_2 \varepsilon_1 k_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_2 k_2^2 = 0.$$

Daraus folgt

$$k_2 = \sqrt{-\frac{k_1^4}{b_2} - \varepsilon_0 k_1^2 + 2 \varepsilon_1 k_1 - \varepsilon_2}.$$

Also erhalten wir dasselbe Resultat wie früher *).

*) In betreff der algebraischen Form des Integrals der Gleichung (3d), welche das Geschlecht 1 hat, sei bemerkt, dass Herr Wallenberg (Crelle, Bd. 116 Seite 1 flgd.) neuerdings folgenden Satz bewiesen hat: „Wenn eine lineare homo-

2. Wir setzen nun voraus, dass R eine Funktion von z, aber von y unabhängig ist. Dann folgt aus den Bedingungsgleichungen S. 21, dass erstens ψ_1 vom ersten Grade in y sein muss. Ferner ergiebt sich, dass ψ_2 auch vom ersten Grade ist; denn wäre es vom zweiten Grade, so ginge aus 4) hervor, dass R von y abhängig sein müsste, was der Voraussetzung widerspricht. Endlich resultiert aus 5), dass ψ_3 ebenfalls vom ersten Grade sein muss. Es sei

$$\psi_1 = a_0 + a_1 y, \qquad \psi_2 = b_0 + b_1 y, \qquad \psi_3 = c_0 + c_1 y,$$

wo die a, b und c Funktionen von z sind. Die Bedingungsgleichungen werden nun:

$$2) \quad R = \tfrac{1}{4} a_1, \qquad 3) \quad a_0' + a_1' y + b_1 = \tfrac{1}{2} P(a_0 + a_1 y),$$
$$4) \quad b_0' + b_1' y + c_1 - \tfrac{1}{2} a_1 (a_0 + a_1 y) = \tfrac{3}{4} P(b_0 + b_1 y),$$
$$5) \quad c_0' + c_1' y - \tfrac{1}{4} a_1 (b_0 + b_1 y) = P(c_0 + c_1 y).$$

Durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von y entstehen nun folgende Gleichungen für P:

$$P = \frac{2a_0' + 2b_1}{a_0} = \frac{2a_1'}{a_1} = \frac{\frac{4}{3}(b_0' + c_1 - \frac{1}{2} a_0 a_1)}{b_0} = \frac{\frac{4}{3}(b_1' - \frac{1}{2} a_1^2)}{b_1}$$
$$= \frac{c_0' - \frac{1}{4} a_1 b_0}{c_0} = \frac{c_1' - \frac{1}{4} a_1 b_1}{c_1}.$$

Aus diesen Gleichungen bestimmen wir zuerst b_1. Wir erhalten die Differentialgleichung:

$$\alpha) \quad b_1' - \tfrac{3}{2} \frac{a_1'}{a_1} b_1 - \tfrac{1}{2} a_1^2 = 0.$$

Daraus folgt

$$b_1 = C_2 a_1^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} a_1^{\frac{3}{2}} \int a_1^{\frac{1}{2}} dz.$$

Wir setzen $a_1^{\frac{1}{2}} = v'$ *); dann wird

$$b_1 = v'^3 (C_2 + \tfrac{1}{2} v).$$

Für a_0 bekommen wir die Differentialgleichung

---

gene Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Coefficienten rationale Funktionen von z sind, ein algebraisches Integral erster Ordnung besitzt, welches ausser dem von y' und y freien Gliede mindestens Glieder zweier verschiedenen Dimensionen enthält, so sind ihre sämtlichen Integrale algebraisch". Dieser Satz kommt hier in Betracht.

*) Vergl. Seite 19.

$$\beta) \quad a_0' - \frac{a_1'}{a_1} a_0 + b_1 = 0;$$

demnach

$$a_0 = \nu'^2 (C_0 - C_2 \nu - \tfrac{1}{4} \nu^2).$$

Jetzt können wir c_1 bestimmen, wir haben

$$\gamma) \quad c_1' - 2 \frac{a_1'}{a_1} c_1 - \frac{a_1 b_1}{4} = 0;$$

es ist

$$c_1 = \nu'^4 \left(k_1 + \frac{C_2 \nu}{4} + \frac{\nu^2}{16} \right).$$

b_0 ergiebt sich aus der Differentialgleichung

$$\delta) \quad b_0' - \tfrac{3}{2} \frac{a_1'}{a_1} b_0 + c_1 - \frac{a_0 a_1}{4} = 0.$$

Wir erhalten

$$b_0 = \left(C_1 - \frac{(2k_1 - C_0)\nu}{2} - \tfrac{3}{8} C_2 \nu^2 - \frac{\nu^3}{16} \right) \cdot \nu'^3.$$

Schliesslich resultiert aus der Differentialgleichung

$$\varepsilon) \quad c_0' - 2 \frac{a_1'}{a_1} c_0 - \frac{a_1 b_0}{4} = 0$$

$$c_0 = \nu'^4 \left(k_0 + \frac{C_1 \nu}{4} - \left(\frac{2k_1 - C_0}{16} \right) \nu^2 - \frac{C_2 \nu^3}{32} - \frac{\nu^4}{256} \right).$$

(3) nimmt nun folgende Form an:

(3e)
$$y'^4 + \nu'^2 (C_0 - C_2 \nu - \tfrac{1}{4} \nu^2 + y) y'^2$$
$$+ \nu'^3 \left(C_1 - \left(\frac{2k_1 - C_0}{2} \right) \nu - \tfrac{3}{8} C_2 \nu^2 - \frac{\nu^3}{16} + (C_2 + \tfrac{1}{2} \nu) y \right) y'$$
$$+ \nu'^4 \left(k_0 + \frac{C_1 \nu}{4} - \left(\frac{2k_1 - C_0}{16} \right) \nu^2 - \frac{C_2 \nu^3}{32} - \frac{\nu^4}{256} + \left(k_1 + \frac{C_2 \nu}{4} + \frac{\nu^2}{16} \right) y \right) = 0.$$

Wenn die Konstanten von Null verschieden sein sollen, können wir, unbeschadet der Allgemeinheit,

$C_2 = 1$, $C_0 = a - 1$, $2k_1 - C_0 = \frac{3}{2}$, $2C_1 + 1 = b$, $16k_0 - 4b + 1 = c$

setzen. Ferner führen wir für $1 + \frac{1}{2} \nu$ die neue Funktion ϱ ein. Dann wird

(3e)
$$y'^4 + 4\varrho'^2 (a - \varrho^2 + y) y'^2 + 4\varrho'^3 (b - \varrho^3 + 2\varrho y) y'$$
$$+ \varrho'^4 (c + 4b\varrho - \varrho^4 + (8a + 4\varrho^2) y) = 0.$$

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich aus der Relation von Poincaré ergiebt, ist nun, da

$$R = \frac{a_1}{4} = \frac{\nu'^2}{4} = \varrho'^2 \quad \text{und} \quad S = -\frac{\nu''}{\nu'} = -\frac{\varrho''}{\varrho'},$$

$$y'' - \frac{\varrho''}{\varrho'} y' + \varrho'^2 = 0.$$

Demnach

$$y' = c_1 \varrho' - \varrho \varrho' \quad \text{und} \quad y = c_1 \varrho - \tfrac{1}{2} \varrho^2 + c_2.$$

Die zur vollständigen Lösung gehörige Relation zwischen den beiden Integrationskonstanten c_1 und c_2 lautet:

$$c_1^4 + 4ac_1^2 + 4c_1^2 c_2 + 8ac_2 + 4bc_1 + c = 0.$$

Sind in der Differentialgleichung die Konstanten a, b und c gleich Null, so ändert sich in der allgemeinen Lösung nur die Relation zwischen c_1 und c_2.

3. Es sei nun R vom ersten Grade in y; dann ist ψ_1 vom zweiten Grade und demnach, wie aus 4) und 5) Seite 21 hervorgeht, ψ_2 vom dritten und ψ_4 vom vierten Grade in y. Wir setzen

$$\psi_1 = a_0 + a_1 y + a_2 y^2, \qquad \psi_2 = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3,$$

$$\psi_3 = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + c_4 y^4,$$

wo die a, b und c Funktionen von z sind.

Die Bedingungsgleichungen gehen nun in folgende über:

$$2) \quad a_1 + 2a_2 y = 4R,$$

$$3) \quad 2a_0' + 2a_1' y + 2a_2' y^2 + 2b_1 + 4b_2 y + 6b_3 y^2 = P(a_0 + a_1 y + a_2 y^2),$$

$$4) \quad c_1 + 2c_2 y + 3c_3 y^2 + 4c_4 y^3 + b_0' + b_1' y + b_2' y^2 + b_3' y^3$$
$$= \tfrac{1}{2}(a_1 + 2a_2 y)(a_0 + a_1 y + a_2 y^2) + \tfrac{3}{4} P(b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3)$$

und

$$5) \quad c_0' + c_1' y + c_2' y^2 + c_3' y^3 + c_4' y^4 - \left(\frac{a_1 + 2a_2 y}{4}\right)(b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3)$$
$$= P(c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + c_4 y^4).$$

Daraus folgen für P die Gleichungen:

$$P = \frac{2a_0' + 2b_1}{a_0} = \frac{2a_1' + 4b_2}{a_1} = \frac{2a_2' + 6b_3}{a_2} = \left(\frac{c_1 + b_0' - \frac{1}{2}a_0a_1}{b_0}\right)^{\frac{4}{3}}$$
$$= \left(\frac{2c_2 + b_1' - a_0a_2 - \frac{1}{2}a_1^2}{b_1}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{3c_3 + b_2' - \frac{3}{2}a_1a_2}{b_2}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{4c_4 + b_3' - a_2^2}{b_3}\right)^{\frac{4}{3}}$$
$$= \frac{c_0' - \frac{1}{4}b_0a_1}{c_0} = \frac{c_1' - \frac{1}{2}b_0a_2 - \frac{1}{4}a_1b_1}{c_1} = \frac{c_2' - \frac{1}{4}a_1b_2 - \frac{1}{2}a_2b_1}{c_2}$$
$$= \frac{c_3' - \frac{1}{4}a_1b_3 - \frac{1}{2}a_2b_2}{c_3} = \frac{c_4' - \frac{1}{2}a_2b_3}{c_4}.$$

Zunächst ergiebt sich für c_4 die Differentialgleichung

$$\alpha) \quad c_4' - \left(\frac{2a_2'}{a_2} + \frac{6b_3}{a_2}\right)c_4 - \tfrac{1}{2}a_2b_3 = 0.$$

Aus dieser folgt, wenn wir $\frac{b_3}{a_2} = \frac{\lambda'}{\lambda}$ *) substituieren,

$$c_4 = Ca_2^2\lambda^6 - \frac{a_2^2}{12} = \frac{a_2^2}{12}(12C\lambda^6 - 1).$$

Wir setzen zuerst $C = 0$; dann ist

$$c_4 = -\frac{a_2^2}{12}.$$

Zur Bestimmung von a_2 haben wir die Differentialgleichung

$$\beta) \quad 8c_4 + 2b_3' - 2a_2^2 = \frac{3a_2'b_3}{a_2} + \frac{9b_3^2}{a_2}.$$

c_4 und b_3 ersetzen wir durch ihre obigen Werte und erhalten, wenn wir auch

$$b_3' = \frac{\lambda''}{\lambda}a_2 + \frac{a_2'\lambda'}{\lambda} - \frac{a_2\lambda'^2}{\lambda^2}$$

beachten,

$$\beta_1) \quad a_2' + \left(11\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{2\lambda''}{\lambda'}\right)a_2 + \tfrac{8}{3}\frac{\lambda}{\lambda'}a_2^2 = 0.$$

Durch die Substitution $v = -\frac{1}{a_2}$ entsteht

$$v' - \left(11\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{2\lambda''}{\lambda'}\right)v + \tfrac{8}{3}\frac{\lambda}{\lambda'} = 0,$$

und es wird

*) Diese Substitution ist nötig, wenn c_4, a_2 und b_3 rationale Funktionen von z sind. Vergl. Seite 6.

$$v = -\frac{1}{a_2} = k\frac{\lambda'^{11}}{\lambda'^{12}} + \frac{8}{27}\frac{\lambda^2}{\lambda'^{12}}.$$

Es sei auch die Konstante $k = 0$; dann ist

$$a_2 = -\frac{27}{8}\frac{\lambda'^2}{\lambda^2},$$

ferner

$$c_1 = -\frac{27^2}{12 \cdot 8^2}\frac{\lambda'^4}{\lambda^4} \quad \text{und} \quad b_3 = -\frac{27}{8}\frac{\lambda'^3}{\lambda^3}.$$

Wir machen nun die Voraussetzung, dass $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ sind. Die Folge davon ist, dass in diesem Falle auch $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = b_2 = 0$ sind. Demnach bleibt nur noch übrig, c_0 zu bestimmen. Es ist

$$\gamma) \quad \frac{c_0'}{c_0} = 2\frac{a_2'}{a_2} + 6\frac{b_3}{a_2}, \qquad \text{also} \qquad c_0 = k_1\left(\frac{27}{8}\right)^2\lambda'^4\lambda^2.$$

Die Differentialgleichung (3) hat nun folgende Gestalt:

$$(3f) \quad y'^4 - \frac{27}{8}\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}y^2y'^2 - \frac{27}{8}\frac{\lambda'^3}{\lambda^3}y^3y' + \frac{27^2}{8^2}\frac{\lambda'^4}{\lambda^4}\left(k_1\lambda^6 - \frac{1}{12}y^4\right) = 0.$$

Die Diskriminante der allgemeinen Differentialgleichung von der Form

$$F = y'^4 + 2\psi_1 y'^2 + 4\psi_2 y' + \psi_3 = 0$$

ist

$$D = \psi_3(\psi_1^2 - \psi_3)^2 - 27\psi_2^4 + 18\psi_1\psi_2^2\psi_3 - 2\psi_1^3\psi_2^2.$$

Diese ist für den allgemeinen Fall dieses Teiles, wo ψ_1 vom zweiten, ψ_2 vom dritten und ψ_3 vom vierten Grade in y ist, vom zwölften Grade. Daraus folgt, dass das Geschlecht der durch (3) definierten algebraischen Funktion y' von y im allgemeinen $p = 3$ ist. In dem jetzt zu behandelnden speziellen Falle haben wir aber die willkürlichen Konstanten $C = 0$ und $k = 0$ gesetzt, und infolge dessen wird der Grad der Diskriminantengleichung auf acht erniedrigt. Die Gleichung (3f) hat also das Geschlecht $p = 1$.

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' + Q = 0$ ist nun, da $S = -\left(\frac{\lambda''}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{2\lambda}\right)$ und $R = -\frac{27}{16}\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}y$,

$$y'' - \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{2\lambda}\right)y' - \frac{27}{16}\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}y = 0.$$

Machen wir λ zur unabhängigen Variablen, so erhalten wir:

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda}\frac{dy}{d\lambda} - \frac{27}{16\lambda^2}y = 0.$$

Diese Gleichung kann man bekanntlich mit Hülfe der Substitution $y = \lambda^r$ lösen. Es ist

$$r(r-1) - \tfrac{1}{2}r - \frac{27}{16} = 0;$$

daraus ergiebt sich $r_1 = \frac{9}{4}$, $r_2 = -\frac{3}{4}$ und demnach

$$y = c_1\lambda^{\frac{9}{4}} + c_2\lambda^{-\frac{3}{4}}.$$

Dies ist die allgemeine Lösung der vorliegenden Differentialgleichung. Dazu gehört die Relation zwischen den beiden Konstanten c_1 und c_2: $9k_1 - 64c_1^3c_2 = 0$, die man erhält, wenn man den Wert von y und den daraus folgenden Wert von y' in die Gleichung (3f) setzt.

Wir wollen die Gleichung (3f) auch mit Hülfe des Fuchs'schen Satzes*) lösen. Es sei $\Gamma = \psi_0 + \psi_1\Delta$**). Durch Differentiation dieser Gleichung erhalten wir

$$\alpha) \quad 0 = \frac{\partial\psi_0}{\partial z} + \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)\Delta + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\Delta^2 + \psi_1\frac{d\Delta}{dz}.$$

In diesem Falle ist

$$\frac{d\Delta}{dz} = \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{2\lambda}\right)y' + \frac{27}{16}\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}y.$$

Substituieren wir diesen Wert in α) und setzen wegen der Irreduktibilität von (3f) die Coefficienten der einzelnen Potenzen von Δ gleich Null, so entstehen folgende Gleichungen:

$$1) \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial z} + \frac{27}{16}\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}y\psi_1 = 0, \qquad 2) \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{2\lambda}\right)\psi_1 = 0,$$

$$3) \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = 0.$$

Aus 3) folgt, dass ψ_1 von y unabhängig ist. Nun geht aus 1) und 2) hervor, dass ψ_0 eine Funktion ersten Grades von y sein muss mit von z abhängigen Coefficienten. Es sei $\psi_0 = a_0 + a_1y$. Dann wird

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften: „Ueber eine Form, in welche sich das allgemeine Integral einer Differentialgleichung bringen lässt, wenn dasselbe algebraisch ist", Berlin 1884, Seite 1171.

**) Vergl. Wallenberg a. a. O. Seite 328.

1) $a_0' + a_1' y + \frac{27}{16}\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} y\psi_1 = 0,$ 2) $a_1 + \psi_1' + \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{2\lambda}\right)\psi_1 = 0.$

Aus 1) erhalten wir, indem wir die Coefficienten der Potenzen von y gleich Null setzen,

$$\beta) \quad a_0' = 0,$$

d. h. a_0 ist eine Konstante, die wir mit Γ vereinigen können. Ferner ergiebt sich

$$\gamma) \quad a_1' = -\frac{27\lambda'^2}{16\lambda^2}\psi_1.$$

Wir differenzieren 2) und es entsteht

$$\delta) \quad a_1' + \psi_1'' + \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{2\lambda}\right)\psi_1' + \left(\frac{\lambda'''}{\lambda'} - \frac{\lambda''^2}{\lambda'^2} + \frac{\lambda''}{2\lambda} - \frac{\lambda'^2}{2\lambda^2}\right)\psi_1.$$

Nun geht aus γ) und δ) für ψ_1 die Differentialgleichung zweiter Ordnung hervor:

$$\varepsilon) \quad \psi_1'' + \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{2\lambda}\right)\psi_1' + \left(\frac{\lambda'''}{\lambda'} - \frac{\lambda''^2}{\lambda'^2} + \frac{\lambda''}{2\lambda} - \frac{35}{16}\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}\right)\psi_1 = 0.$$

Wir substituieren $\frac{u}{\lambda'} = \psi_1$, und es entsteht die einfachere Gleichung

$$\varepsilon_1) \quad u'' - \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{2\lambda}\right)u' - \frac{35}{16}\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}u = 0.$$

Führen wir hier wie Seite 31 λ als unabhängige Variable ein, so ist

$$\varepsilon_2) \quad \frac{d^2u}{d\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda}\frac{du}{d\lambda} - \frac{35}{16\lambda^2}u = 0.$$

Die determinierende Fundamentalgleichung in der Umgebung von $\lambda = 0$ ist

$$r(r-1) + \tfrac{1}{2}r - \frac{35}{16} = 0,$$

also $r_1 = \frac{7}{4}$, $r_2 = -\frac{5}{4}$. In diesem Falle sind dann bekanntlich $\lambda^{\frac{7}{4}}$ und $\lambda^{-\frac{5}{4}}$ die Elemente des Fundamentalsystems und infolge dessen

$$u = c_1\lambda^{\frac{7}{4}} + c_2\lambda^{-\frac{5}{4}}.$$

Demnach ist

$$\psi_1 = c_1\frac{\lambda^{\frac{7}{4}}}{\lambda'} + c_2\frac{\lambda^{-\frac{5}{4}}}{\lambda'}.$$

Es genügt aber hier ein partikuläres Integral, da c_1 und c_2 willkürliche Konstanten sind, die nur nicht beide gleichzeitig verschwinden dürfen. Wir wählen $\psi_1 = c_2 \frac{\lambda^{-\frac{5}{4}}}{\lambda'}$ und erhalten mit Hülfe von 2)

$$a_1 = \tfrac{3}{4} c_2 \lambda^{-\frac{9}{4}}.$$

Dann ist

$$\Gamma = \tfrac{3}{4} c_2 \lambda^{-\frac{9}{4}} y + c_2 \frac{\lambda^{-\frac{5}{4}}}{\lambda'} \Delta,$$

oder, wenn wir c_2 mit Γ vereinigen:

$$\Gamma = \tfrac{3}{4} \lambda^{-\frac{9}{4}} y + \frac{\lambda^{-\frac{5}{4}}}{\lambda'} \Delta,$$

wo Δ durch (3f) als algebraische Funktion von y und z definiert ist.

Wir wollen jetzt hieraus das allgemeine Integral der gewöhnlichen Form herleiten. Zu diesem Zwecke müssen wir für Δ seinen Wert

$$\Delta = \left(\Gamma \lambda^{\frac{5}{4}} - \tfrac{3}{4} \frac{y}{\lambda}\right) \lambda'$$

in (3f) substituieren. Es wird dann

$$y = \tfrac{1}{3} \Gamma \lambda^{\frac{9}{4}} + \frac{27^2 k_1 \lambda^{-\frac{3}{4}}}{3 \cdot 8^2 \cdot \Gamma^3}.$$

Dies Resultat stimmt mit dem früheren vollkommen überein, wenn wir $\frac{1}{3}\Gamma = c_1$ und $\frac{27^2}{3 \cdot 8^2} \frac{k_1}{\Gamma^3} = c_2$ setzen.

Die Konstanten genügen der oben erhaltenen Relation

$$9k_1 - 64 c_1^3 c_2 = 0.$$

Umgekehrt erhalten wir aus dem Seite 32 gefundenen Integral die Fuchs'sche Form, wenn wir dasselbe nach der Division mit $\lambda^{-\frac{3}{4}}$ differenzieren. Dann wird

$$3c_1 = \tfrac{3}{4} \lambda^{-\frac{9}{4}} y + \frac{\lambda^{-\frac{5}{4}}}{\lambda'} y'$$

oder

$$\Gamma = \tfrac{3}{4} \lambda^{-\frac{9}{4}} y + \frac{\lambda^{-\frac{5}{4}}}{\lambda'} \Delta.$$

3a. Wir hatten Seite 30 $C = 0$ gesetzt. Es sei jetzt $C \neq 0$.

Dann hat die Differentialgleichung für a_2 folgende Form:

$$\beta_1) \quad a_2' + \left(11\frac{\lambda'}{\lambda} - 2\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)a_2 - \tfrac{2}{3}\frac{\lambda}{\lambda'}(12C\lambda^6 - 4)a_2^2 = 0;$$

demnach wird

$$v = -\frac{1}{a_2} = k\frac{\lambda^{11}}{\lambda'^2} - \tfrac{2}{9}\frac{\lambda^{11}12C}{\lambda'^2\lambda^9} + \frac{8}{27}\frac{\lambda^{11}}{\lambda'^2\lambda^9},$$

also

$$a_2 = -\frac{27\lambda'^2}{\lambda^2(27k\lambda^9 - 8(9C\lambda^6 - 1))}.$$

Wir behandeln zuerst den Fall, dass $k = 0$ ist. Dann können wir $9C$ mit λ^6 vereinigen, indem wir λ für $\sqrt[6]{9C}\lambda$ setzen; infolge dessen ist

$$a_2 = \frac{27}{8}\frac{\lambda'^2}{\lambda^2(\lambda^6 - 1)}.$$

Substituieren wir $v = \lambda^3$, so wird

$$a_2 = \tfrac{3}{8}\frac{v'^2}{v^2(v^2 - 1)}.$$

Ferner ist

$$b_3 = \tfrac{1}{8}\frac{v'^3}{v^3(v^2 - 1)},$$

$$c_4 = \frac{v'^4(4v^2 - 3)}{256v^4(v^2 - 1)^2}$$

und

$$c_0 = \frac{9k_1 v'^4 \cdot v^2}{64v^4(v^2 - 1)^2}.$$

(3) nimmt also folgende Form an:

$$(3g) \quad y'^4 + \frac{3v'^2y^2y'^2}{8v^2(v^2 - 1)} + \frac{v'^3y^3y'}{8v^3(v^2 - 1)} + \frac{v'^4(9k_1v^2 + \frac{1}{4}(4v^2 - 3)y^4)}{64v^4(v^2 - 1)^2} = 0.$$

$$p = 3.$$

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung wird in diesem Falle, da $S = -\frac{v''}{v'} + \frac{v'}{2v} + \frac{vv'}{v^2 - 1}$ und $R = \frac{3v'^2y}{16v^2(v^2 - 1)}$,

$$A) \quad y'' - \left(\frac{v''}{v'} - \frac{v'}{2v} - \frac{vv'}{v^2 - 1}\right)y' + \frac{3}{16}\frac{v'^2y}{v^2(v^2 - 1)} = 0.$$

Führen wir wieder v als unabhängige Variable ein, so ist

$$\frac{d^2y}{dv^2}+\left(\frac{1}{2v}+\frac{v}{v^2-1}\right)\frac{dy}{dv}+\frac{3y}{16v^2(v^2-1)}=0.$$

Die determinierende Fundamentalgleichung in der Umgebung des singulären Punktes $v=0$ ist

$$r(r-1)+\frac{r}{2}-\frac{3}{16}=0;$$

denn

$$P_1(v)=\frac{(3v^2-1)}{2(v^2-1)}, \qquad \text{also} \qquad P_1(o)=+\frac{1}{2}$$

und

$$P_2(v)=\frac{3}{16(v^2-1)}, \quad \text{folglich} \quad P_2(o)=-\frac{3}{16};$$

demnach

$$r_1=\tfrac{3}{4}, \qquad r_2=-\tfrac{1}{4}.$$

Wenn wir infolge dessen $y=v^{-\frac{1}{4}}\cdot u$ substituieren*), so erhalten wir

$$\text{B)} \quad \frac{d^2u}{dv^2}+\frac{v}{v^2-1}\cdot\frac{du}{dv}-\frac{1}{16}\frac{u}{(v^2-1)}=0.$$

Diese Gleichung können wir in die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe transformieren. Wir setzen

$$v=2ax+b;$$

dann ist

$$v^2-1=4a^2x^2+4abx+b^2-1.$$

Es muss nun $b^2=1$ sein und demnach $b=\pm 1$. Nehmen wir $b=-1$, so ist $a=1$, also $v=2x-1$. Substituieren wir diesen Wert, so folgt

$$x(x-1)\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2x-1}{2}\frac{du}{dx}-\frac{1}{16}u=0.$$

Wählen wir $b=+1$, so bekommen wir dieselbe Gleichung.

In unserem Falle ist nun

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=F(\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},x);$$

denn es wird

---

*) Vergl. Heffter, zur Integration der linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Berlin 1886. Seite 6.

$$\gamma = \tfrac{1}{2},$$
$$\alpha + \beta + 1 = 1,$$
$$\alpha\beta = -\frac{1}{16},$$

also $\alpha = \tfrac{1}{4}, \qquad \beta = -\tfrac{1}{4}.$

Da $F(\alpha, \alpha - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, x) = \tfrac{1}{2}[(1+\sqrt{x})^{\varepsilon} + (1-\sqrt{x})^{\varepsilon}]$

ist, wo $\varepsilon = \gamma - \alpha - \beta = 1 - 2\alpha$, so wird

$$1) \quad F(\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, x) = \tfrac{1}{2}[(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} + (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}].$$

Ferner ist

$$x^{\frac{1}{2}} F(\alpha, \alpha + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, x) = \frac{1}{2\varepsilon}[(1+\sqrt{x})^{\varepsilon} - (1-\sqrt{x})^{\varepsilon}].$$

Aus der Reihe der 24 partikulären Integrale der Gauss'schen Reihe*) wählen wir noch

$$x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x).$$

Dies wird für die vorliegende Gleichung

$$x^{\frac{1}{2}} F(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{2}, x),$$

und es ergiebt sich, da man α und β vertauschen kann,

$$2) \quad x^{\frac{1}{2}} F(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{2}, x) = (1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} - (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}.$$

1) und 2) sind nun partikuläre Integrale unserer Differentialgleichung, demnach auch beliebige Vielfache von 1) und 2) und die Summe und Differenz von solchen. Also sind

$$u_1 = (1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} \qquad \text{und} \qquad u_2 = (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}$$

Partikularintegrale der vorliegenden linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die allgemeine Lösung ist somit

$$u = c_1(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} + c_2(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}.$$

Wir ersetzen x wieder durch v; dann wird schliesslich:

$$y = v^{-\frac{1}{4}}\left[c_1\left(1+\sqrt{\frac{1+v}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + c_2\left(1-\sqrt{\frac{1+v}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Dies ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3g).

---

*) Vergl. Kummer, über die hypergeometrische Reihe. Crelles Journal Bd. 15 S. 52 das 3. Integral.

Die Relation zwischen den beiden Integrationskonstanten lautet

$$c_1^4 + c_2^4 - 6c_1^2 c_2^2 + 9k_1 = 0.$$

Es soll nun auch (3g) mit Anwendung des Fuchs'schen Satzes gelöst werden*). Wir setzen wie früher, Seite 32, $\Gamma = \psi_0 + \psi_1 \Delta$ und erhalten wieder durch Differentiation

$$\alpha) \quad 0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right)\Delta + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\Delta^2 + \psi_1 \frac{d\Delta}{dz}.$$

Dann entstehen mit Hülfe der Gleichung A) Seite 35 die drei Gleichungen:

$$1) \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \frac{3}{16}\frac{\nu'^2}{\nu^2(1-\nu^2)} = 0,$$

$$2) \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \left(\frac{\nu''}{\nu'} - \frac{\nu'}{2\nu} + \frac{\nu\nu'}{1-\nu^2}\right)\psi_1 = 0,$$

$$3) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0.$$

Es ist also ψ_1 wieder von y unabhängig und ψ_0 vom ersten Grade in y; demnach sei $\psi_0 = a_0 + a_1 y$, wo die a von z abhängig sind, und es wird

$$1) \quad a_0' + a_1' y + \frac{3\nu'^2 y}{16\nu^2(1-\nu^2)}\psi_1 = 0,$$

$$2) \quad a_1 + \psi_1' + \left(\frac{\nu''}{\nu'} - \frac{\nu'}{2\nu} + \frac{\nu\nu'}{1-\nu^2}\right)\psi_1 = 0.$$

Aus 1) folgt wie Seite 33, dass a_0 eine Konstante ist, die wir mit Γ vereinigen können. Ferner resultiert aus 1) die Gleichung

$$\beta) \quad a_1' = -\frac{3\nu'^2}{16\nu^2(1-\nu^2)}\psi_1.$$

Durch Differentiation von 2) ergiebt sich

$$\gamma) \quad a_1' + \psi_1'' + \left(\frac{\nu''}{\nu'} - \frac{\nu'}{2\nu} + \frac{\nu\nu'}{1-\nu^2}\right)\psi_1' +$$

$$\left(\frac{\nu'''}{\nu'} - \frac{\nu''^2}{\nu'^2} - \frac{\nu''}{2\nu} + \frac{\nu'^2}{2(1-\nu^2)} + \frac{\nu'^2}{2\nu^2(1-\nu^2)} + \frac{\nu\nu''}{1-\nu^2} + \frac{2\nu^2\nu'^2}{(1-\nu^2)^2}\right)\psi_1 = 0.$$

Aus β) und γ) entsteht nun

*) Vergl. Seite 32.

$$\delta) \quad \psi_1'' + \left(\frac{\nu''}{\nu'} - \frac{\nu'}{2\nu} + \frac{\nu\nu'}{1-\nu^2}\right)\psi_1'$$
$$+ \left(\frac{\nu'''}{\nu'} - \frac{\nu''^2}{\nu'^2} - \frac{\nu''}{2\nu} + \frac{\nu'^2}{2(1-\nu^2)} + \frac{5\nu'^2}{16\nu^2(1-\nu^2)} + \frac{\nu\nu''}{1-\nu^2} + \frac{2\nu^2\nu'^2}{(1-\nu^2)^2}\right)\psi_1$$
$$= 0.$$

Wir substituieren $\psi_1 = \frac{u}{\nu'}$ und erhalten

$$\varepsilon) \quad u'' - \left(\frac{\nu''}{\nu'} + \frac{\nu'}{2\nu} - \frac{\nu\nu'}{1-\nu^2}\right)u' + \frac{\nu'^2(24\nu^4+3\nu^2+5)u}{16\nu^2(1-\nu^2)^2} = 0.$$

Daraus folgt in derselben Weise wie früher:

$$\zeta) \quad \frac{d^2u}{d\nu^2} + \left(\frac{1}{2\nu} - \frac{\nu}{1-\nu^2}\right)\frac{du}{d\nu} + \frac{(24\nu^4+3\nu^2+5)u}{16\nu^2(1-\nu^2)^2} = 0.$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, stellen wir für die Umgebung der drei singulären Punkte $\nu = 0$, $\nu = 1$ und $\nu = -1$ die determinierenden Fundamentalgleichungen auf. Sie lauten:

$$1) \quad r(r-1) - \tfrac{1}{2}r + \tfrac{5}{16} = 0,$$
$$2) \quad s(s-1) - \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2} = 0,$$
$$3) \quad t(t-1) - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2} = 0;$$

demnach

$$r_1 = \tfrac{5}{4}, \quad r_2 = \tfrac{1}{4}; \qquad s_1 = 1, \quad s_2 = \tfrac{1}{2}; \qquad t_1 = 1, \quad t_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Infolge dessen können wir $\zeta)$ durch die Substitution

$$u = \nu^{\frac{1}{4}}(1-\nu^2)^{\frac{1}{2}} \cdot w$$

in eine einfachere Gleichung transformieren*). Es ergiebt sich

$$\eta) \quad \frac{d^2w}{d\nu^2} - \frac{\nu}{1-\nu^2}\cdot\frac{dw}{d\nu} + \frac{1}{16}\cdot\frac{w}{1-\nu^2} = 0.$$

Diese Gleichung ist mit der Gleichung B) Seite 36 identisch. Wir erhielten die Partikularintegrale

$$\left(1+\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{und} \qquad \left(1-\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mithin wird, wenn wir das erstere dieser Integrale wählen,

---

*) Vergl. S. 36.

$$\psi_1 = \frac{c_1 \nu^{\frac{1}{4}}(1-\nu^2)^{\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\nu'},$$

$$a_1 = c_1\left(\tfrac{1}{4}\nu^{-\frac{3}{4}}(1-\nu^2)^{\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\nu^{\frac{1}{4}}(1-\nu^2)^{\frac{1}{2}}}{8\left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

und demnach

$$\Gamma = \left(\tfrac{1}{4}\nu^{-\frac{3}{4}}(1-\nu^2)^{\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\nu^{\frac{1}{4}}(1-\nu^2)^{\frac{1}{2}}}{8\left(\frac{1+\nu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)y$$
$$+\nu^{\frac{1}{4}}(1-\nu^2)^{\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta,$$

wo die Konstante c_1 mit Γ vereinigt ist.

Auch in diesem Falle entsteht aus dem Seite 37 gefundenen Integral der Gleichung (3g) die obige Fuchs'sche Form, wenn wir dasselbe nach Division mit $\nu^{-\frac{1}{4}}\left(1+\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ differenzieren und $-\frac{c_2}{2} = \Gamma$ setzen.

3b. Es ist nun noch der Fall zu erledigen, wo in dem Ausdrucke

$$a_2 = -\frac{27\lambda'^2}{\lambda^2(27k\lambda^9 - 8(9C\lambda^6-1))}$$

die beiden Konstanten k und C von 0 verschieden sind. Wir specialisieren beide und stellen die Bedingung, dass, nachdem wir ν für $3\lambda^3$ gesetzt,

$$k\nu^3 - 8C\nu^2 + 8 = 0$$

zwei gleiche Wurzeln hat. Es muss demnach die Diskriminante dieser Gleichung gleich Null sein, also $27k^2 = 256C^3$. Der Einfachheit halber nehmen wir $k = 2$ und $C = \frac{3}{4}$. Dann ist

$$a_2 = -\tfrac{3}{2}\cdot\frac{\nu'^2}{\nu^2(\nu-2)^2(\nu+1)},$$

$$b_3 = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\nu'^3}{\nu^3(\nu-2)^2(\nu+1)},$$

$$c_0 = \frac{k_1}{4}\cdot\frac{\nu'^4}{\nu^2(\nu-2)^4(\nu+1)^2}$$

und

$$c_4 = \frac{3}{16}\cdot\frac{\nu'^4(\nu-1)}{\nu^4(\nu-2)^4(\nu+1)}.$$

Die Differentialgleichung (3) lautet demnach

$$(3h) \qquad y'^4 - \tfrac{3}{2}\frac{\nu'^2 y^2 y'^2}{\nu^2(\nu-2)^2(\nu+1)} - \tfrac{1}{2}\frac{\nu'^3 y^3 y'}{\nu^3(\nu-2)^2(\nu+1)} + \frac{\nu'^4}{16\nu^4}\frac{[4k_1\nu^2 + 3(\nu^2-1)y^4]}{(\nu-2)^4(\nu+1)^2} = 0.$$

In diesem Falle ist

$$S = -\frac{\nu''}{\nu'} + \frac{\nu'}{2\nu} + \frac{\nu'}{\nu-2} + \frac{\nu'}{2(\nu+1)}$$

und

$$R = -\tfrac{3}{4}\,\nu^2(\nu-2)^2(\nu+1),$$

also ergiebt sich die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\alpha) \qquad y'' - \left(\frac{\nu''}{\nu'} - \frac{\nu'}{2\nu} - \frac{\nu'}{\nu-2} - \frac{\nu'}{2(\nu+1)}\right)y' - \tfrac{3}{4}\frac{\nu'^2 y}{\nu^2(\nu-2)^2(\nu+1)} = 0.$$

Daraus folgt, wenn wir wieder ν als unabhängige Variable nehmen:

$$\beta) \qquad \frac{d^2y}{d\nu^2} + \left(\frac{1}{2\nu} + \frac{1}{\nu-2} + \frac{1}{2(\nu+1)}\right)\frac{dy}{d\nu} - \frac{3y}{4\nu^2(\nu-2)^2(\nu+1)} = 0.$$

Die determinierende Fundamentalgleichung in der Umgebung des singulären Punktes $\nu = 0$ ist

$$r(r-1) + \tfrac{1}{2}r - \tfrac{3}{16} = 0, \qquad \text{also} \quad r_1 = \tfrac{3}{4}, \quad r_2 = -\tfrac{1}{4}.$$

Ferner ergiebt sich in der Umgebung des singulären Punktes $\nu = 2$ die determinierende Fundamentalgleichung

$$r(r-1) + r - \tfrac{1}{16} = 0, \qquad \text{mithin} \quad r_1 = +\tfrac{1}{4}, \quad r_2 = -\tfrac{1}{4}.$$

Zur Vereinfachung der Differentialgleichung $\beta)$ benutzen wir demnach die Substitution $y = \nu^{-\frac{1}{4}}(\nu-2)^{-\frac{1}{4}}u$ *). Dann erhalten wir die Differentialgleichung

$$\gamma) \qquad \frac{d^2u}{d\nu^2} + \frac{2\nu-1}{2(\nu-2)(\nu+1)}\frac{du}{d\nu} - \frac{u}{4(\nu-2)(\nu+1)} = 0.$$

Diese Gleichung können wir wieder in die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe überführen, da sich zwei singuläre Punkte

*) Vergl. Heffter a. a. O.

immer in 0 und 1 legen lassen*). Setzen wir $\nu-1$ für ν, dann rückt der eine singuläre Punkt nach 0, und führen wir nun für ν die neue Variable $3x$ ein, so liegt jetzt der andere singuläre Punkt in 1; wir substituieren also $\nu = 3x-1$. Die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe wird infolge dessen:

$$\delta) \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2x-1}{2x(x-1)}\frac{du}{dx} - \frac{u}{4x(x-1)} = 0.$$

Es ist in diesem Falle

$$\gamma = \tfrac{1}{2}, \quad \alpha+\beta+1 = 1, \quad \alpha\beta = -\tfrac{1}{4};$$

demnach

$$\alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \beta = -\tfrac{1}{2}, \quad \text{und} \quad F(\alpha,\beta,\gamma,x) = F(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},x).$$

Ausserdem sind auch

$$x^{1-\gamma}\cdot F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x) \quad \text{und} \quad (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\cdot F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x)$$

partikuläre Integrale der Gauss'schen Reihe. Diese erhalten hier die Form

$$x^{\frac{1}{2}}F(1,0,\tfrac{3}{2},x) \quad \text{und} \quad (1-x)^{\frac{1}{2}}F(0,1,\tfrac{1}{2},x).$$

Da aber $F(1,0,\frac{3}{2},x) = 1$ und ebenfalls $F(0,1,\frac{1}{2},x) = 1$, so sind $x^{\frac{1}{2}}$ und $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ partikuläre Lösungen von $\delta)$. Das allgemeine Integral derselben ist also

$$u = c_1\cdot x^{\frac{1}{2}} + c_2(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Es ist

$$x = \tfrac{1}{3}(\nu+1) \quad \text{und} \quad y = \nu^{-\frac{1}{4}}(\nu-2)^{-\frac{1}{4}}u,$$

folglich ergiebt sich als Lösung von (3h)

$$y = \frac{\nu^{-\frac{1}{4}}(\nu-2)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{3}}[c_1(\nu+1)^{\frac{1}{2}} + c_2(2-\nu)^{\frac{1}{2}}].$$

Die dazu gehörige Relation zwischen c_1 und c_2 ist in diesem Falle $27c_1^4 - 54c_1^2c_2^2 + 4k_1 = 0$.

4. Wir haben bis jetzt die Fälle behandelt, in denen erstens $R = 0$, zweitens R nur von z abhängig war und drittens R eine Funktion ersten Grades von y war.

Es sei nun R vom zweiten Grade in y. Dann ist ψ_1 vom dritten Grade. Wäre nun ψ_2 ebenfalls vom dritten Grade, so

*) Vergl. Seifert, Inauguraldissertation, Göttingen 1875, Seite 16 und Heffter a. a. O. Seite 33.

müsste nach 5) Seite 21 ψ_3 vom fünften Grade sein. Es würde aber P nach 3) von y unabhängig sein, dagegen nach 4) eine Funktion zweiten Grades in y werden. Diese Annahmen führen also zu keiner Fuchs'schen Gleichung.

Ist zweitens, bei derselben Voraussetzung für R wie vorhin, ψ_2 vom vierten Grade, so ist ψ_3 vom sechsten Grade, und die Folge davon ist, dass sich für P aus 3) und 4) verschiedene Werte ergeben würden.

Ebenso kommen wir zu unmöglichen Folgerungen, wenn wir drittens ψ_2 vom fünften Grade annehmen, da wieder aus 3) und 4) für P verschiedene Werte hervorgehen würden.

Endlich sei ψ_2 vom sechsten Grade, und es folgen wie bei den vorhergehenden Annahmen aus 3) und 4) verschiedene Werte für P.

Setzen wir nun voraus, dass R eine Funktion dritten Grades*) in y sei, so ist ψ_1 vom vierten Grade, der zugleich nach der ersten Fuchs'schen Bedingung der Maximalgrad für ψ_1 ist.

Nehmen wir an, dass ψ_2 auch den vierten Grad in y habe, so wird ψ_3 eine Funktion siebenten Grades; aus 3) und 4) ergeben sich aber, wie oben, verschiedene Werte für P.

Dasselbe geschieht, wenn ψ_2 vom fünften Grade ist.

Aus den vorhergehenden Entwicklungen folgt, dass nur zwei Fälle eintreten können:

I. ψ_1 ist höchstens vom zweiten Grade. Dann ist ψ_2 höchstens vom dritten und ψ_3 vom vierten Grade.

II. ψ_1 ist vom vierten Grade. Dann muss ψ_2 wirklich vom sechsten und ψ_3 vom achten Grade sein, da sich in 5) Seite 21 die höchsten Potenzen auf der rechten Seite fortheben können.

---

*) Von höherem als dem dritten Grade kann R nicht sein. Vergl. Crelle, Bd. 116, Seite 2.

IV.

In diesem Teile wollen wir die Differentialgleichung von der Form

$$y'^4 + \psi_1 y'^3 + \psi_2 y' + \psi_3 = 0$$

einer näheren Betrachtung unterziehen.

Die Poincarésche Relation erhält in diesem Falle folgende Form:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} y'^4 + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} y'^3 + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} y'^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right) y' + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} =$$

$$P(y'^4 + \psi_1 y'^3 + \psi_2 y' + \psi_3) + (R + Sy')(4y'^3 + 3\psi_1 y'^2 + \psi_2).$$

Daraus ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$1) \quad P + 4S = \frac{\partial \psi_1}{\partial y},$$

$$2) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = P\psi_1 + 3S\psi_1 + 4R,$$

$$3) \quad 3R\psi_1 = \frac{\partial \psi_2}{\partial y},$$

$$4) \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = P\psi_2 + S\psi_2,$$

$$5) \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = P\psi_3 + R\psi_2.$$

1. Es sei erstens wieder $R = 0$. Aus 3) folgt bei dieser Voraussetzung, dass ψ_2 von y unabhängig ist. Wir setzen $\psi_2 = \mu$, wo μ eine Funktion von z ist.

Aus 2) resultiert, dass in ψ_1 die Variabeln getrennt sein müssen, und aus 1) und 2), dass ψ_1 nur vom ersten Grade in y sein kann.

Deshalb geben wir ψ_1 die Form $\psi_1 = \lambda(a_0 + y)$, wo λ nur von z abhängig und a_0 konstant ist.

Die Gleichung 5) zeigt, dass auch in ψ_3 die Variabeln getrennt sein müssen. Es sei $\psi_3 = \nu\bar{\psi}_3$, wo, wie in den früheren Abschnitten ψ_3 nur von y abhängig ist. Die Bedingungsgleichungen haben jetzt folgende Gestalt:

$$1) \quad P + 4S = \lambda,$$

$$2) \quad P + 3S = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

$$4)\quad \mu' + \nu \frac{\partial \bar{\psi}_3}{\partial y} = \mu (P+S),$$

$$5)\quad P = \frac{\nu'}{\nu}.$$

Aus 4) geht hervor, dass $\bar{\psi}_3$ entweder von y unabhängig oder vom ersten Grade in y ist.

Behandeln wir den ersten Fall, so ist also $\psi_3 = \nu$, da wir die Konstante $\bar{\psi}_3$ mit ν vereinigen können. Es entstehen nun die beiden Differentialgleichungen:

$$A)\quad \frac{\mu'}{\mu} = 3\frac{\lambda'}{\lambda} - 2\lambda$$

und

$$B)\quad \frac{\nu'}{\nu} = 4\frac{\lambda'}{\lambda} - 3\lambda;$$

wir setzen $\lambda = -\frac{\varrho'}{\varrho}$ *) und erhalten aus

$$A)\quad \mu = -k_1 \frac{\varrho'^3}{\varrho}$$

und aus

$$B)\quad \nu = k_2 \frac{\varrho'^4}{\varrho}.$$

Die Differentialgleichung (4) wird infolge dessen

$$y'^4 - \frac{\varrho'}{\varrho}(a_0 + y) y'^3 - k_1 \frac{\varrho'^3}{\varrho} y' + k_2 \frac{\varrho'^4}{\varrho} = 0.$$

Führen wir noch die neue Variable $w = a_0 + y$ ein, so erhalten wir

(4a)
$$w'^4 - \frac{\varrho'}{\varrho} w w'^3 - k_1 \frac{\varrho'^3}{\varrho} w' + k_2 \frac{\varrho'^4}{\varrho} = 0.$$

$$p = 0.$$

Wir substituieren $w' = \varrho' t$; dann wird

---

*) ϱ muss rational sein, wenn μ und ν rational vorausgesetzt sind; λ ist auf alle Fälle rational. Vergl. Seite 4.

Setzt man $\frac{\lambda^3}{\mu} = \omega$, so wird

$$\lambda = \frac{\omega'}{2\omega}, \qquad \mu = \frac{\omega'^3}{8\omega^4} \qquad \text{und} \qquad \nu = \frac{k\omega'^4}{16\omega^5 \omega^{\frac{1}{2}}}.$$

Dann sind μ, ν und ω beliebige Funktionen von z. Vergl. Seite 23.

$$w = \varrho t - \frac{k_1}{t^2} + \frac{k_2}{t^3},$$

und die Differentialgleichung für t ist: $t' = 0$, mithin $t = c$. Also resultiert als Lösung der Gleichung (4a)

$$w = c\varrho - \frac{k_1}{c^2} + \frac{k_2}{c^3}.$$

Zweitens sei $\overline{\psi}_3$ von y abhängig und demnach $\psi_3 = \nu(b_0 + y)$. Die Gleichung A) hat in diesem Falle die Form

$$\text{A)} \quad \mu' + \nu = \left(3\frac{\lambda'}{\lambda} - 2\lambda\right)\mu.$$

Führen wir wieder $-\lambda = \frac{\varrho'}{\varrho}$ ein, so erhalten wir aus B), welche unverändert bleibt, wie oben, $\nu = k_2 \frac{\varrho'^4}{\varrho}$ und A) geht in

$$\text{A}_1) \quad \mu' - \left(3\frac{\lambda'}{\lambda} + 2\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\mu + k_2\frac{\varrho'^4}{\varrho} = 0$$

über, und es ergiebt sich

$$\mu = -k_1\frac{\varrho'^3}{\varrho} - k_2\varrho'^3.$$

Die Gleichung (4) wird also

$$\text{(4b)} \qquad y'^4 - \frac{\varrho'}{\varrho}(a_0 + y)y'^3 - \frac{\varrho'^3}{\varrho}(k_1 + k_2\varrho)y' + k_2\frac{\varrho'^4}{\varrho}(b_0 + y) = 0.$$

Es sei wieder $a_0 + y = w$ und $b_0 - a_0 = c$, und (4b) erhält die Gestalt

$$w'^4 - \frac{\varrho'}{\varrho}ww'^3 - \frac{\varrho'^3}{\varrho}(k_1 + k_2\varrho)w' + k_2\frac{\varrho'^4}{\varrho}(c + w) = 0.$$

Um diese Gleichung zu lösen, benutzen wir die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Es ist $R = 0$ und $S = -\frac{\varrho''}{\varrho'}$. Daraus folgt die Gleichung

$$\alpha) \quad w'' = \frac{\varrho''}{\varrho'}w',$$

und es wird $w' = c_1\varrho'$, demnach

$$w = c_1\varrho + c_2.$$

Die Relation zwischen c_1 und c_2 lautet:

$$c_1^3c_2 + c_1k_1 - ck_2 - c_2k_2 = 0.$$

Da die Gleichung (4b) eine Integralgleichung der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung α) ist und da (4b) verschiedene Dimensionen in w und w' besitzt, so kann man, wie Herr Wallenberg gezeigt*), die Fuchs'sche Form des Integrals in folgender Weise herstellen. Man dividiert die Gleichung durch das von w und w' freie Glied und setzt Γ gleich der niedrigsten Dimension der Gleichung in w und w'. Wir erhalten also:

$$\Gamma = w - \frac{(k_1 + k_2 \varrho)}{k_2 \varrho'} \Delta,$$

wo $\Delta = w'$ ist. (Die Konstante c ist mit Γ vereinigt.)

In diesem Falle kann man aber auch die Fuchs'sche Form ebenso bequem aus α) durch einmalige Integration ableiten. Es ergiebt sich

$$\Gamma_1 = \frac{\Delta}{\varrho'}.$$

Substituieren wir Γ_1 in Γ, so erhalten wir wieder das Integral in der gewöhnlichen Form. Es wird

$$w = \Gamma + \frac{k_1}{k_2} \Gamma_1 + \varrho \Gamma_1,$$

oder, wenn $\Gamma_2 = \Gamma + \frac{k_1}{k_2} \Gamma_1$ eingeführt wird,

$$w = \Gamma_1 \varrho + \Gamma_2.$$

Γ_1 und Γ_2 sind der Relation

$$\Gamma_1^3 \Gamma_2 + \Gamma_1 k_1 - c k_2 - \Gamma_2 k_2 = 0$$

unterworfen. Daraus folgt für Γ und Γ_1 die Relation:

$$\frac{k_1}{k_2} \Gamma_1^4 + \Gamma_1^3 \Gamma - \Gamma k_2 - c k_2 = 0.$$

Im Anschluss an das Vorhergehende sei bemerkt, dass man, um das Integral der Gleichung (4b) in der gewöhnlichen Form zu erhalten, nur das Integral erster Ordnung der Gleichung α) herzustellen braucht. Wenn man nämlich dieses in (4b) substituiert, so folgt direkt

$$w = c_1 \varrho + \frac{k_2 c - c_1 k_1}{c_1^3 - k_2}.$$

*) Crelle, Bd. 116, S. 6 flgd.

Die Relation zwischen den beiden Konstanten des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Berechnung bisweilen ziemlich umständlich ist, entsteht also auf diese Weise gleichzeitig mit der Herleitung des Integrals der Gleichung (4b), oder vielmehr, die Konstante c_2 ist dann sofort in ihrem eigentlichen Werte ausgedrückt. Diese Methode kommt darauf hinaus, dass man von einer Fuchs'schen Form des Integrals zu der gewöhnlichen Lösung übergeht*). Von Vorteil ist dieselbe besonders dann, wenn man, wie in diesem Falle, das Integral erster Ordnung aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung direkt berechnen kann.

2. R sei nun eine Funktion von z, und wir setzen $R = \lambda$. Dann geht aus 2) hervor, dass ψ_1 von y unabhängig sein muss. Daraus folgt in Verbindung mit 3) weiter, dass ψ_2 eine Funktion ersten Grades von y ist, und endlich, dass auch ψ_3 vom ersten Grade in y sein muss. Wir setzen demnach

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \mu, \\ \psi_2 &= a_0 + a_1 y, \\ \psi_3 &= b_0 + b_1 y, \end{aligned}$$

wo μ, die a und b Funktionen von z sind. Infolge dessen ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} &1)\quad P + 4S = 0, \\ &2)\quad \mu' = (P + 3S)\mu + 4\lambda, \\ &3)\quad 3\lambda\mu = a_1, \\ &4)\quad a_0' + a_1' y + b_1 = (P + S)(a_0 + a_1 y), \\ &5)\quad b_0' + b_1' y = P(b_0 + b_1 y) + \lambda(a_0 + a_1 y). \end{aligned}$$

Hieraus entstehen folgende Gleichungen für P:

$$P = \frac{4(\mu' - 4\lambda)}{\mu} = \frac{4\mu'}{\mu} - \frac{16 a_1}{3\mu^2} = \frac{(a_0' + b_1)\frac{4}{3}}{a_0} = \frac{4a_1'}{3a_1} = \frac{b_0'}{b_0} - \frac{a_0 a_1}{3\mu b_0}$$
$$= \frac{b_1'}{b_1} - \frac{a_1^2}{3\mu b_1}.$$

Zunächst können wir nun eine Differentialgleichung für μ aufstellen. Sie lautet:

$$\alpha)\quad \frac{3\mu'}{\mu} - \frac{a_1'}{a_1} = \frac{4a_1}{\mu^2}.$$

*) Vergl. Seite 34.

Wir substituieren $\frac{3\nu'}{\nu} = \frac{a_1}{\mu^2}$ *) und erhalten $\frac{\mu^3}{a_1} = \nu^{12}$, indem wir die Integrationskonstante gleich 1 setzen. Es ist also

$$\mu = 3\nu^{11}\nu'$$

und

$$a_1 = 27\nu^{21}\nu'^3.$$

Jetzt ist auch die Differentialgleichung für b_1 lösbar:

$$\beta) \quad b_1' - \tfrac{4}{3}\frac{a_1'}{a_1} b_1 - \frac{a_1^2}{3\mu} = 0.$$

Daraus folgt

$$b_1 = k_1 a_1^{\frac{1}{3}} + a_1^{\frac{4}{3}} \int \frac{a_1^2 dz}{3 a_1^{\frac{4}{3}} \mu}$$

und nach Einsetzung des obigen Wertes für a_1:

$$b_1 = 3^4 \nu^{28} \nu'^4 (k_1 + \tfrac{1}{4}\nu^4).$$

Für a_0 ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\gamma) \quad a_0' - \frac{a_1'}{a_1} a_0 + b_1 = 0,$$

mithin

$$a_0 = 27 c_0 \nu^{21} \nu'^3 - 27\nu^{21}\nu'^3 (\tfrac{3}{8} k_1 \nu^8 + \tfrac{1}{16}\nu^{12}).$$

Endlich resultiert b_0 aus der Gleichung

$$\delta) \quad b_0' - \tfrac{4}{3}\frac{a_1'}{a_1} b_0 - \frac{a_0 a_1}{3\mu} = 0;$$

es wird

$$b_0 = 3^4 k_0 \nu^{28} \nu'^4 + 3^4 \nu^{28} \nu'^4 \left(\frac{c_0 \nu^4}{4} - \frac{k_1 \nu^{12}}{32} - \frac{\nu^{16}}{16^2} \right).$$

Die Differentialgleichung (4) nimmt nun folgende Form an:

$$y'^4 + 3\nu^{11}\nu' y'^3 + 27\nu^{21}\nu'^3 \left(c_0 - \tfrac{3}{8} k_1 \nu^8 - \frac{\nu^{12}}{16} + y \right) y'$$

$$+ 3^4 \nu^{28} \nu'^4 \left(k_0 + c_0 \nu^4 - k_1 \frac{\nu^{12}}{32} - \frac{\nu^{16}}{16^2} + (k_1 + \tfrac{1}{4}\nu^4) y \right) = 0.$$

Setzen wir $\nu^4 = \omega$, so geht sie in

*) Unter der Voraussetzung, dass μ und a_1 rationale Funktionen von z sind; ν ist dann ebenfalls rational.

$$(4c) \qquad y'^4 + \tfrac{3}{4}\,\omega^2\omega' y'^3 + \frac{3^3}{4^3}\,\omega^3\omega'^3\left(c_0 - \tfrac{3}{8}\,k_1\omega^2 - \frac{\omega^3}{16} + y\right)y'$$

$$+ \frac{3^4}{4^4}\,\omega^4\omega'^4\left(k_0 + \frac{c_0\omega}{4} - \frac{k_1\omega^3}{32} - \frac{\omega^4}{16^2} + (k_1 + \tfrac{1}{4}\,\omega)\,y\right) = 0$$

über.

Es war $R = \lambda = \dfrac{a_1}{3\mu}$, also ist, durch ω ausgedrückt,

$$R = \frac{3}{16}\,\omega\omega'^2 \qquad \text{und} \qquad S = -\frac{\omega''}{\omega'} - \frac{\omega'}{\omega}.$$

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für y wird demnach

$$\alpha) \quad y'' - \left(\frac{\omega''}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega}\right)y' + \frac{3}{16}\,\omega\omega'^2 = 0.$$

Hieraus folgt durch direkte Integration:

$$\beta) \quad y' = c_1\omega\omega' - \tfrac{3}{16}\,\omega^2\omega'$$

und durch nochmalige Integration:

$$y = \frac{c_1}{2}\,\omega^2 - \frac{1}{16}\,\omega^3 + c_2.$$

Die beiden Konstanten c_1 und c_2 stehen durch die Relation

$$4c_1^4 + 108c_0c_1 + 108c_1c_2 + 81k_0 + 81k_1c_2 = 0$$

im Zusammenhang.

Man kann auch das Integral der Gleichung (4c) wie bei der Gleichung (4b) mit Hülfe des Integrals erster Ordnung der Gleichung α) herstellen, indem man dies in (4c) substituiert.

Es wird dann

$$y = \frac{c_1}{2}\,\omega^2 - \frac{\omega^3}{16} - \frac{4c_1^4 + 108c_0c_1 + 81k_0}{108c_1 + 81k_1}.$$

3. R sei eine Funktion ersten Grades von y. Dann muss infolge der Bedingungsgleichungen Seite 44 ψ_1 vom ersten, ψ_2 vom dritten und ψ_3 vom vierten Grade in y sein. Wir setzen also:

$$\psi_1 = a_0 + a_1 y,$$
$$\psi_2 = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3,$$
$$\psi_3 = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + c_4 y^4,$$

wo die a, b und c Funktionen von z sind.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $b_0 = b_1 = b_2 = 0$ sind. Die Bedingungsgleichungen Seite 44 werden nun folgende:

1) $P + 4S = a_1$,

2) $a_0' + a_1' y = (\frac{1}{4} P + \frac{3}{4} a_1)(a_0 + a_1 y) + 4R$,

3) $3R(a_0 + a_1 y) = 3b_3 y^2$,

4) $b_3' y^3 + c_1 + 2c_2 y + 3c_3 y^2 + 4c_4 y^3 = (\frac{3}{4} P + \frac{1}{4} a_1) b_3 y^3$,

5) $c_0' + c_1' y + c_2' y^2 + c_3' y^3 + c_4' y^4 = P(c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + c_4 y^4) + R b_3 y^3$.

Es sei $R = A_0 + A_1 y$. Dann ergiebt sich aus 3), da A_1 infolge der gemachten Voraussetzung von 0 verschieden sein muss, $A_0 = 0$ und $a_0 = 0$.

Ausserdem resultiert aus 4), dass $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ist.

Für P entstehen nun folgende Gleichungen:

$$P = 4\left(\frac{a_1'}{a_1} - \frac{4b_3}{a_1^2} - \frac{3}{4} a_1\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{b_3'}{b_3} + \frac{4c_4}{b_3} - \frac{a_1}{4}\right) = \frac{c_4'}{c_4} - \frac{b_3^2}{a_1 c_4} = \frac{c_0'}{c_0}.$$

Hieraus leiten wir für c_4 die Differentialgleichung ab:

$$\text{A)} \quad c_4' - \left[\frac{4a_1'}{a_1} - \frac{16b_3}{a_1^2} - 3a_1\right] c_4 - \frac{b_3^2}{a_1} = 0.$$

Wir wollen zur Lösung dieser Gleichung $\frac{16b_3}{a_1^2} + 3a_1$ auf die Form $\alpha \frac{\lambda'}{\lambda}$ bringen, wo α vorläufig eine beliebige Konstante ist*). Nehmen wir an, dass $b_3 = k_1 \frac{\lambda'^3}{\lambda^3}$ und $a_1 = k_2 \frac{\lambda'}{\lambda}$ ist, wo k_1 und k_2 ebenfalls Konstanten sind, so erhalten wir:

$$\frac{16b_3}{a_1^2} + 3a_1 = \left(\frac{16k_1 + 3k_2^3}{k_2^2}\right)\frac{\lambda'}{\lambda}, \qquad \text{also} \quad \alpha = \frac{16k_1 + 3k_2^3}{k_2^2}.$$

Nun folgt aus A)

$$c_4 = \frac{C a_1^4}{\lambda^\alpha} + \frac{a_1^4}{\lambda^\alpha} \int \frac{k_1^2}{k_2^5} \lambda^{\alpha-1} \cdot \lambda' dz.$$

Es sei die Konstante $C = 0$; dann wird

$$c_4 = \frac{k_1^2 \cdot k_2 \cdot \lambda'^4}{(16k_1 + 3k_2^3)\lambda^4}.$$

---

*) Vorausgesetzt, dass c_4, a_1 und b_3 rationale Funktionen von z sind. Dann ist auch λ rational in z, und α muss eine ganze Zahl werden. Vergl. Seite 4.

Um nun die beiden Konstanten k_1 und k_2 zu bestimmen, setzen wir die erhaltenen Werte von a_1, b_3 und c_4 in die Differentialgleichung:

$$\text{B)} \quad \frac{c_4'}{c_4} - \frac{b_3^2}{a_1 c_4} = \tfrac{4}{3}\frac{b_3'}{b_3} + \frac{16c_4}{3b_3} - \frac{a_1}{3}.$$

Dann entsteht nach einiger Rechnung zwischen k_1 und k_2 die Relation: $k_2^3 = -6k_1 \pm 2k_1$.

Wir wählen $k_1 = 2$, und es folgt, wenn + genommen wird, $k_2 = -2$. Demnach wird $\alpha = 2$; ferner

$$a_1 = -2\frac{\lambda'}{\lambda},$$

$$b_3 = 2\frac{\lambda'^3}{\lambda^3},$$

$$c_4 = -\frac{\lambda'^4}{\lambda^4}.$$

Schliesslich ist c_0 aus der Differentialgleichung

$$\text{C)} \quad \frac{c_0'}{c_0} = \frac{c_4'}{c_4} - \frac{b_3^2}{a_1 c_4}$$

zu bestimmen; es ergiebt sich

$$c_0 = -k\frac{\lambda'^4}{\lambda^6}.$$

Die Differentialgleichung (4) erhält also folgende Gestalt:

$$\text{(4d)} \qquad y'^4 - 2\frac{\lambda'}{\lambda}yy'^3 + 2\frac{\lambda'^3}{\lambda^3}y^3y' - \frac{\lambda'^4}{\lambda^4}\left(\frac{k}{\lambda^2} + y^4\right)' = 0.$$

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist in diesem Falle, da $R = -\frac{\lambda''^2}{\lambda^2}y$ und $S = -\frac{\lambda''}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda}$,

$$y'' - \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)y' - \frac{\lambda'^2}{\lambda^2}y = 0.$$

Wir vereinfachen die Gleichung wie früher, indem wir λ zur unabhängigen Variabeln machen, und bekommen

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dy}{d\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}y = 0.$$

Die determinierende Fundamentalgleichung in der Umgebung von

$\lambda = 0$ ist: $r(r-1)+r-1 = 0$. Demnach $r_1 = +1$, $r_2 = -1$; und die Elemente des Fundamentalsystems sind in diesem Falle λ und $\frac{1}{\lambda}$, also $y = c_1\lambda + \frac{c_2}{\lambda}$.

Die beiden Konstanten c_1 und c_2 sind durch die Relation $16c_1c_2^3 + k = 0$ verbunden.

4. Im Anschluss an das Vorhergehende behandeln wir noch die Gleichung

(5) $$y'^m + \psi_1 y'^{m-1} + \psi_2 y' + \psi_3 = 0.$$

Es ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen für die Coefficienten:

$$1)\quad P + mS = \frac{\partial\psi_1}{\partial y},$$

$$2)\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z} = P\psi_1 + (m-1)S\psi_1 + mR,$$

$$3)\quad (m-1)R\psi_1 = 0,$$

$$4)\quad \frac{\partial\psi_2}{\partial y} = 0,$$

$$5)\quad \frac{\partial\psi_2}{\partial z} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} = (P+S)\psi_2,$$

$$6)\quad \frac{\partial\psi_3}{\partial z} = P\psi_3 + R\psi_2.$$

Aus 3) folgt, da ψ_1 nicht verschwinden soll, $R = 0$, und aus 4), dass ψ_2 von y unabhängig ist. Aus 1) uud 2) resultiert erstens, dass ψ_1 vom ersten Grade in y sein muss, und zweitens, dass die Variabeln in ψ_1 getrennt sind. Dasselbe ist mit ψ_3 der Fall. Endlich zeigt 5), dass ψ_3 entweder von y unabhängig oder eine Funktion ersten Grades von y ist. Die Coefficienten der Gleichung (5) sind also denselben Bedingungen unterworfen, wie die der Gleichung unter IV, 1.

Demnach entstehen, mit Beibehaltung derselben Bezeichnungsweise, im ersten Falle, wo ψ_3 nur von z abhängig ist, die beiden Gleichungen:

$$\text{A)}\quad \frac{\mu'}{\mu} = (m-1)\frac{\lambda'}{\lambda} - (m-2)\lambda$$

und

$$\text{B)}\quad \frac{\nu'}{\nu} = m\frac{\lambda'}{\lambda} - (m-1)\lambda.$$

Daraus folgt

$$\mu = \frac{(-1)^{m-1} k_1 \varrho'^{m-1}}{\varrho} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{(-1)^m k_2 \varrho'^m}{\varrho}.$$

Die Differentialgleichung (5) lautet nun

$$(5a) \quad y'^m - \frac{\varrho'}{\varrho}(a_0+y)\, y'^{m-1} + \frac{(-1)^{m-1} k_1 \varrho'^{m-1} y'}{\varrho} + \frac{(-1)^m k_2 \varrho'^m}{\varrho} = 0,$$

oder, nach Einführung der neuen Variabeln $w = a_0 + y$,

$$w'^m - \frac{\varrho'}{\varrho} w w'^{m-1} + \frac{(-1)^{m-1} k_1 \varrho'^{m-1}}{\varrho} w' + \frac{(-1)^m k_2 \varrho'^m}{\varrho} = 0,$$

deren Lösung

$$w = \varrho c + \frac{(-1)^{m-1} k_1}{c^{m-2}} + \frac{(-1)^m k_2}{c^{m-1}}$$

ist.

Im zweiten Falle, wo ψ_3 eine Funktion ersten Grades von y ist, bleibt die Gleichung B) unverändert und A) wird

$$A_1) \quad \mu' + \nu = \left[(m-1)\frac{\lambda'}{\lambda} - (m-2)\lambda\right]\mu.$$

Es ist demnach

$$\nu = \frac{(-1)^m k_2 \varrho'^m}{\varrho}$$

wie vorhin. Nun ist μ aus der Differentialgleichung

$$A_2) \quad \mu' - \left[(m-1)\frac{\lambda'}{\lambda} - (m-2)\lambda\right]\mu + \frac{(-1)^m k_2 \varrho'^m}{\varrho} = 0$$

zu bestimmen. Wir erhalten

$$\mu = \frac{(-1)^{m-1} k_1 \varrho'^{m-1}}{\varrho} + (-1)^{m-1} k_2 \varrho'^{m-1}.$$

Die Differentialgleichung (5) nimmt also, nachdem wir wieder $w = a_0 + y$ eingeführt und wie auf Seite 46 $b_0 - a_0 = c$ gesetzt, folgende Form an:

$$(5b) \quad w'^m - \frac{\varrho'}{\varrho} w w'^{m-1} + \frac{(-1)^{m-1} \varrho'^{m-1}}{\varrho}(k_1 + k_2 \varrho) w' + \frac{(-1)^m k_2 \varrho'^m}{\varrho}(c+w) = 0.$$

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung ist dieselbe, wie Seite 46,

$$w'' = \frac{\varrho''}{\varrho'} w', \quad \text{also} \quad w = c_1 \varrho + c_2.$$

Die Konstanten c_1 und c_2 sind durch die Relation

$$c_1^{m-1}c_2-(-1)^{m-1}c_1k_1-(-1)^m\cdot ck_2-(-1)^m\cdot c_2k_2 = 0$$

verbunden.

5. Es möge zuletzt auch noch die von Herrn Poincaré angegebene Integrationsmethode Anwendung finden, die auf der birationalen Transformation Riemannscher Flächen in sich selbst beruht*).

Wenn die Differentialgleichung von einfacherer Gestalt ist, kann man die Transformation leicht bestimmen. Es sei z. B. die Gleichung

$$y'^4-2\frac{\lambda'}{\lambda}yy'^3+2\frac{\lambda'^3}{\lambda^3}y^3y'-\frac{\lambda'^4}{\lambda^4}\left(\frac{k}{\lambda^2}+y^4\right) = 0 \tag{4d}$$

zu lösen. Wir dividieren die Gleichung durch λ'^4 und erhalten

$$\left(\frac{y'^4}{\lambda'^4}-2\frac{yy'^3}{\lambda\lambda'^3}+2\frac{y^3y'}{\lambda^3\lambda'}-\frac{y^4}{\lambda^4}\right)-\frac{k}{\lambda^6} = 0. \tag{4d$_1$}$$

Der Ausdruck in der Klammer ist durch $\frac{y'}{\lambda'}+\frac{y}{\lambda}$ teilbar.

Demnach ergiebt sich

$$\left(\frac{y'}{\lambda'}+\frac{y}{\lambda}\right)\left(\frac{y'}{\lambda'}-\frac{y}{\lambda}\right)^3-\frac{k}{\lambda^6} = 0. \tag{4d$_2$}$$

Wenn wir nun die Gleichung (4d$_2$) mit λ^6 multiplizieren, so ist

$$\left(\frac{y'}{\lambda'}+\frac{y}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda^2y'}{\lambda'}-\lambda y\right)^3-k = 0. \tag{4d$_3$}$$

Nun wird die durch (4d$_3$) gegebene Riemannsche Fläche durch die birationale Transformation

$$\frac{y_0'}{\lambda_0'}+\frac{y_0}{\lambda_0} = \frac{y_1'}{\lambda_1'}+\frac{y_1}{\lambda_1},$$
$$\frac{\lambda_0^2y_0'}{\lambda_0'}-\lambda_0y_0 = \frac{\lambda_1^2y_1'}{\lambda_1'}-\lambda_1y_1$$

in sich selbst übergeführt. Hieraus ergiebt sich nach Elimination von y_1':

$$y_1 = \lambda_1\left(\frac{y_0'}{2\lambda_0'}+\frac{y_0}{2\lambda_0}\right)-\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_0^2y_0'}{2\lambda_0'}-\frac{y_0}{2\lambda_0}\right)$$

und, wenn wir den Index 1 unterdrücken:

---

*) Vergl. Poincaré a. a. O. S. 23 und Wallenberg a. a. O. S. 345 flgd.

$$y = \lambda\left(\frac{y_0'}{2\lambda_0'} + \frac{y_0}{2\lambda_0}\right) - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda_0^2 y_0'}{2\lambda_0'} - \frac{y_0}{2\lambda_0}\right).$$

Dies Resultat stimmt mit dem Seite 53 erhaltenen überein, wenn

$$c_1 = \left(\frac{y_0'}{2\lambda_0'} + \frac{y_0}{2\lambda_0}\right) \quad \text{und} \quad c_2 = -\left(\frac{\lambda_0^2 y_0'}{2\lambda_0'} - \frac{y_0}{2\lambda_0}\right)$$

gesetzt wird.

Die Relation zwischen den beiden Konstanten ist durch ($4d_3$) gegeben; sie ist mit der früheren identisch.

In gleicher Weise können wir auch die Gleichung

$$(3d) \quad v'^4 + b_2\omega'^2(\varepsilon_0 + \omega^2)v'^2 - 2b_2\omega'^3(\varepsilon_1 + \omega v)v' + b_2\omega'^4(\varepsilon_2 + v^2) = 0$$

behandeln.

Nach Division durch ω'^4 entsteht

$$(3d_1) \quad \frac{v'^4}{\omega'^4} + \frac{b_2\varepsilon_0 v'^2}{\omega'^2} - 2\frac{b_2\varepsilon_1 v'}{\omega'} + \frac{b_2\omega^2 v'^2}{\omega'^2} - 2\frac{b_2\omega v' v}{\omega'} + b_2 v^2 + b_2\varepsilon_2 = 0$$

oder

$$(3d_2) \quad \left(\frac{v'}{\omega'}\right)^4 + b_2\varepsilon_0\left(\frac{v'}{\omega'}\right)^2 - 2b_2\varepsilon_1\left(\frac{v'}{\omega'}\right) + b_2\left(v - \frac{\omega v'}{\omega'}\right)^2 + b_2\varepsilon_2 = 0.$$

Diese Riemannsche Fläche wird durch

$$\frac{v_0'}{\omega_0'} = \frac{v_1'}{\omega_1'},$$

$$v_0 - \frac{\omega_0 v_0'}{\omega_0'} = v_1 - \frac{\omega_1 v_1'}{\omega_1'}$$

in sich selbst transformiert. Dann folgt in derselben Weise wie oben

$$v_1 = \frac{\omega_1 v_0'}{\omega_0'} + \left(v_0 - \frac{\omega_0 v_0'}{\omega_0'}\right) \quad \text{und schliesslich} \quad v = \frac{\omega v_0'}{\omega_0'} + \left(v_0 - \frac{\omega_0 v_0'}{\omega_0'}\right).$$

Die Integrationskonstanten sind

$$c_1 = \frac{v_0'}{\omega_0'} \quad \text{und} \quad c_2 = \left(v_0 - \frac{\omega_0 v_0'}{\omega_0'}\right),$$

deren Relation durch die Gleichung ($3d_2$) dargestellt wird. Das Integral und die Relation sind dieselben, wie die früher (Seite 25 und 26) erhaltenen.

Ist aber die Differentialgleichung von complizierterer Form als die Gleichungen (4d) und (3d), so wird die Umformung nicht leicht sein.

Hat man die Gleichung schon nach einer anderen Methode gelöst, so kann man allerdings mit Benutzung des erhaltenen Resultats ohne Schwierigkeit zu der geeigneten Zerlegung gelangen und dann die Poincarésche Methode anwenden*).

Es sei die Gleichung

$$(3h) \qquad y'^4 - \tfrac{3}{2}\frac{v'^2 y^2 y'^2}{v^2(v-2)^2(v+1)} - \frac{v'^3 y^3 y'}{2v^3(v-2)^2(v+1)} + \frac{v'^4[4k_1 v^2 + 3(v^2-1)y^4]}{16v^4(v-2)^4(v+1)^2} = 0$$

zu lösen.

Aus dem Seite 42 erhaltenen Integral

$$\alpha) \quad y = v^{-\frac{1}{4}}(v-2)^{-\frac{1}{4}}[c_1(v+1)^{\frac{1}{2}} + c_2(2-v)^{\frac{1}{2}}]$$

folgt nach Differentiation

$$\beta) \quad y' = -\frac{c_1 v^{-\frac{5}{4}}}{2\sqrt{3}}(v-2)^{-\frac{5}{4}}(v+1)^{-\frac{1}{2}}(2v-1)v' - \frac{c_2 v^{-\frac{5}{4}}}{2\sqrt{3}}(v-2)^{-\frac{5}{4}}(2-v)^{\frac{1}{2}}(2v-1)v'.$$

Nun ergiebt sich aus α) und β)

$$c_1 = \frac{\sqrt{3}(v-2)^{\frac{1}{4}}(v+1)^{\frac{1}{2}}y}{v^{\frac{3}{4}}} + \frac{2\sqrt{3}\cdot v^{\frac{1}{4}}(v-2)^{\frac{5}{4}}(v+1)^{\frac{1}{2}}y'}{(2v-1)v'}$$

und

$$c_2 = \frac{-\sqrt{3}(v-2)^{\frac{1}{4}}y}{v^{\frac{3}{4}}(2-v)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2\sqrt{3}\cdot v^{\frac{1}{4}}(v-2)^{\frac{5}{4}}(v+1)y'}{(2-v)^{\frac{1}{2}}(2v-1)v'}.$$

Zur Abkürzung setzen wir in c_1 und c_2

$$A = \frac{\sqrt{3}(v-2)^{\frac{1}{4}}(v+1)^{\frac{1}{2}}}{v^{\frac{3}{4}}}, \qquad B = \frac{2\sqrt{3}\,v^{\frac{1}{4}}(v-2)^{\frac{5}{4}}(v+1)^{\frac{1}{2}}}{(2v-1)v'},$$

$$D = \frac{-\sqrt{3}(v-2)^{\frac{1}{4}}}{v^{\frac{3}{4}}(2-v)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad E = \frac{-2\sqrt{3}\,v^{\frac{1}{4}}(v-2)^{\frac{5}{4}}(v+1)}{(2-v)^{\frac{1}{2}}(2v-1)v'};$$

dann können wir (3h) mit Hülfe der Relation

$$27c_1^4 - 54c_1^2c_2^2 + 4k_1 = 0$$

folgende Gestalt geben:

*) Vergl. Wallenberg a. a. O. Seite 345.

$$(3h_1) \qquad 27[Ay+By']^4-54[Ay+By']^2\cdot[Dy+Ey']^2+4k_1 = 0.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Riemannsche Fläche lässt sich demnach durch

$$A_0y_0+B_0y_0' = A_1y_1+B_1y_1',$$
$$D_0y_0+E_0y_0' = D_1y_1+E_1y_1'$$

in sich selbst transformieren.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$y_0 = \frac{E_0(A_1y_1+B_1y_1')}{A_0E_0-B_0D_0}-\frac{B_0(D_1y_1+E_1y_1')}{A_0E_0-B_0D_0},$$

also nach Unterdrückung des Index 0

$$y = \frac{E(A_1y_1+B_1y_1')}{AE-BD}-\frac{B(D_1y_1+E_1y_1')}{AE-BD}.$$

Es ist

$$\frac{E}{AE-BD} = \frac{v^{-\frac{1}{4}}(v-2)^{-\frac{1}{4}}(v+1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}$$

und

$$\frac{B}{AE-BD} = \frac{-v^{-\frac{1}{4}}(v-2)^{-\frac{1}{4}}(2-v)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}.$$

Wenn wir noch die Konstanten

$$C_1 = A_1y_1+B_1y_1'$$

und

$$C_2 = D_1y_1+E_1y_1'$$

einführen, so wird

$$y = \frac{v^{-\frac{1}{4}}(v-2)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{3}}[C_1(v+1)^{\frac{1}{2}}+C_2(2-v)^{\frac{1}{2}}].$$

C_1 und C_2 sind der Relation $(3h_1)$ unterworfen.

Thesen.

1. In der analytischen Geometrie sind die homogenen den nichthomogenen Koordinaten vorzuziehen.

2. Es ist wünschenswert, dass in der Prima aller höheren Lehranstalten die Anfangsgründe der Differentialrechnung gelehrt werden.

3. In der Anatomie und Physiologie der Pflanzen sind auch im Schulunterricht mikroskopische Demonstrationen unbedingt erforderlich.

Vita.

Natus sum Augustus Fridericus Krause a. d. V. Id. Febr. a. h. s. LVIII. Segeletz, in vico Marchico, patre Friderico, matre Luisa e gente Ganschow. Fidei addictus sum evangelicae. Litterarum primordiis imbutus gymnasium Ruppinense adii, deinde gymnasii regii Ioachimici Berolinensis fui alumnus, quod Schapero rectore tum florebat; praeceptis prof. Schindleri, viri carissimi, mathematicarum rerum amore affectus sum.

Autumno a. h. s. LXXVIII. inter cives universitatis Berolinensis receptus per tres annos studiis mathematicis, physicis, philosophicis, rerum naturalium operam dedi virosque audivi clarissimos: du Bois-Reymond, Bruns, Harms, de Helmholtz, Jessen, G. Kirchhoff, Koch, Kummer, Lotze, Paulsen, Peters, Wangerin, Weierstrass, Zeller. Cum omnibus his viris tum Lazaro Fuchs, prof. ill., adhuc studiorum meorum fautori liberalissimo, gratias ago quam maximas.

Autumno a. h. s. LXXXIV. examine pro facultate docendi superato, vere anni insequentis Cottbus me contuli, ut tirocinium quasi magistri in gymnasio huius urbis conficerem. Qua in schola per quinque annos gratis docui.

Inde ab a. h. s. XC. adhuc magistri munere in schola reali eiusdem urbis fungor.